高等学校教学用書

球面天文学教程

C. H. 勃拉日哥著

高等教育出版社

高等学校教学用書

球面天文学教程

С. Н. 勃拉日哥著
易照華　楊海寿譯

高等教育出版社

本書係根據國立技術理論書籍出版社(Государственное издательство технико—теоретической литературы)出版的勃拉日哥(С. Н. Блажко)著"球面天文學教程"(Курс сферической астрономии)1948年版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲高等學校教科書。

本書由北京大學數學力學系易照華、楊海壽合譯,並經戴文賽同志校訂。

球 面 天 文 学 教 程

С. Н. 勃拉日哥著

易照華　楊海壽譯

高 等 教 育 出 版 社 出 版

北京琉璃廠一七〇號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號)

千林印刷廠印刷　新華書店總經售

書號13010.21　開本850×1168 1/32　印張10 12/16　字數290,000

一九五四年十月上海第一版

一九五六年六月上海第二次印刷

印數2,501—3,500　　定價(8)¥1.20

序 言

球面天文學的內容早已確定到這種程度，使所有的教本都包括着標題相同的各章，所不同的只是篇幅的多少和敍述的方式。對於接着普通天文學課程之後來讀這一門課的大學生，我曾想給他們一本在敍述上儘可能簡單明瞭的球面天文學教本，然而這樣做並未將天文現象簡單化，而且也適當地照顧到所要求的計算準確性。

這一教本和其他各教本的最主要區別是：

(1)廣泛地應用了關於窄球面三角形的定理；我覺得，這有助於敍述的直觀性；

(2)大氣折射的敍述比一般的敍述簡單，且能引導讀者去列大氣折射的數值表。

在敍述歲差和章動方面我仿傚了紐康的辦法(Newcomb: A Compendium of Spherical Astronomy)。為了要說明章動的複雜公式是從哪裏來和怎樣得到的，我在末一章中給出了歲差和章動的初步的動力學理論。對這個問題的敍述方式我參考了儒可夫斯基(Н. Е. Жуковский)教授的演講和潘梭(Poinsot)的論文(Précession des équinoxes)。

物理數學博士斯維列夫(М. С. Зверев)曾仔細審閱了原稿並對原文的適當修正和改進提出了指示，僅向他表示深深的謝意。

目　錄

第一章　引言

§1. 初論;天球;球面天文學的對象　天體測量學的觀測幾乎是研究天體在空間的相對位置，它們的移動以及轉動的唯一的基礎。用這些觀測來確定的是在不同時刻的一些方向，而且僅僅是一些方向，沿着這些方向，由被觀測的天體或天體的一定點所發出的光到達觀測者。這當中的例外僅僅是天體視線速度的測定，這種測定是要依靠用都普勒、菲佐(Doppler-Fizeau)原理來進行的光譜分析的。

要直接確定由觀測者至天體的距離是不可能的;這是要經過多次由觀測者至天體的方向測定，並將測得結果綜合，從中推求出來。這些觀測或者同時或者不同時在不同的觀測地點進行，例如由地面上不同的點或者由地球繞日軌道上不同的點來觀測。目前在某些情况下天體的距離並不是根據自天體發出的光線方向的測量而確定的，例如，造父變星和太陽的距離的確定，然而這種情况和上面所說的並不相抵觸，原因是此時所應用的經驗定律是根據用天體測量學方法所得到的距離而確定的。

由於上述，在觀測時刻儘量準確地確定由觀測者至天體(或天體的一定點)的連線方向，就成爲研究天文現象中的重要因素了。

對於這種測定首先必須决定，哪些量可以用來表示每一個個別方向並將它們跟其他方向區別開來。我們可以取三個方向，三個互相垂直的坐標軸線，來作基礎，要確定任何被測量的方向時可以用這個方向和這些坐標軸線所成的三個角來表示。然而在天文學中爲了觀測和研究的方便和清楚起見所使用的是另一種方法。

設想(圖 1)有觀測者 M 在地球上的某個地方(在陸地上,在船上,在飛機的機艙中)或者在地球中心,或者在太陽中心,或者在天狼星上,我們將想像有一條直線,由觀測者連到被他所觀測的天體 Σ,設想在我們前面有一個任意半徑的球面,其中心的位置或是在這本書的一頁上的任一點,或是在教室的黑板上,或是在我們前面的桌子的上面,設想有一條直線,由這個球面的中心起平行(要點就在這裏)於被觀測的天體和實際的或想像中的觀測地點之連線的方向。每一條這樣的直線將和球面交於一點,這個交點我們將以標記天體的字母來表示,這個天體就是和平行於由測觀者到這個天體的方向的直線相對應的。

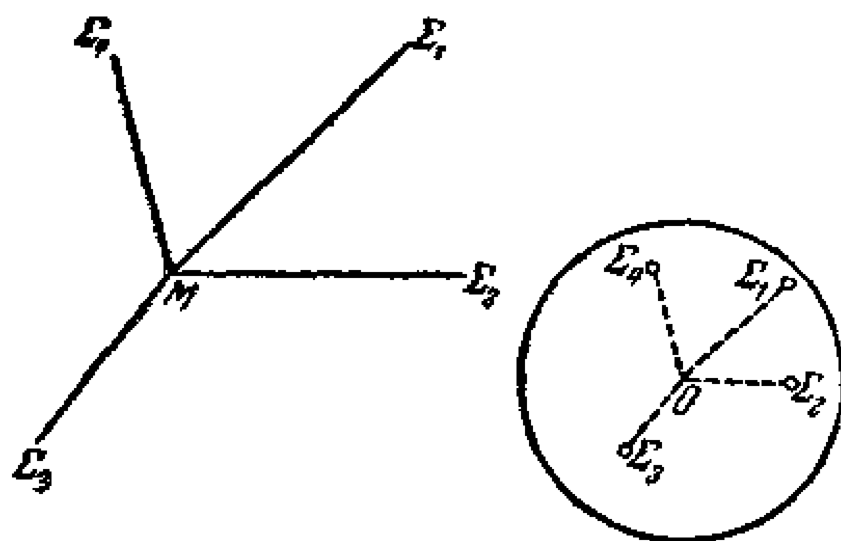


圖 1.

必須了解,位於這個球面中心的假想觀測者所見球面上這些點的相對位置,確能完全代表地面上真的觀測者或者在地球中心,太陽中心或天狼星上的假想觀測者所見天體的相對位置。

引入並利用這種輔助球面的意義在於:將代表着天體的各點在球上的相對位置加以研究,比起測定由真正(或假想的)觀測地點至天體方向的相對位置,是要更清楚些,而且也更簡單,更便於作數學探討。這個輔助球在天文學中稱為天球。

天球儀是天球的模型,在它上面可以註明各種點並且畫出必需的大圓和小圓的弧段。在紙上和黑板上我們按照假定的形式,畫出天球

面上點和弧的相對位置；而不十分注意到描繪的完全的準確，然後再根據數學定理推出某種結果。

此外，對於每一個眞的或假想的觀測者並無任何必要為他假想一個特別的輔助球；相反地，在某些情形下必須根據問題的性質而在同一球上按照指定的方式(也就是使用和被觀測的方向平行的半徑)去畫出對應於各種觀測條件的點；例如，在同一球上標出兩點以表示從地面上的一定點和從地心所看到的同一天體，或者一天體在不同時刻的位置，等等。

球面天文學是天文學的一個部門，它所研究的問題是關於天體在天球上的像的相對位置，也就是說關於在不同的觀測條件下所見天體方向的相對位置，關於它們由各種原因而生的變化，其中如太陽，月球和行星等天體的自行是除外的。球面天文學是天體測量學，天體物理學和天體力學中所有問題的基礎，這些問題牽涉到天體——從我們大氣中的流星直到最遙遠的恆星——在空間中的視位置和實位置，它們的移動和自轉。它對於解決大地測量學的問題也是必需的，大地測量學不僅研究由觀測者至天體的方向，同時也研究由觀測者至地上目標的方向。

為要確切了解上述一切，還須說明一事，卽引至觀測目標的直線所由出發的觀測地點究竟是指什麼？在觀測恆星，行星，太陽和月球時可以把儀器的任一點(以及觀測者身體的任一點，其中包括他的眼睛)當作觀測地點來研究，原因是，雖然嚴格地從數學觀點來講由這些點至天體的直線並不重合，但因這些天體甚為遙遠，引至天體的一定點(例如，引至月球圓面上的一定點)的各個方向之差是微小的，不能由觀測分辨出來。例如，不難算出，從地球上相距 2 米的兩點至月球(距離為 384,400 公里) 的一定點的方向之差不超過 $\frac{2\times 206,265''}{384\times 10^6}$，亦卽0.001弧秒；在天文測量中是不可能達到這樣的準確度的。

但若所測量的是天體的方向與鉛垂線之間的角(天體的天頂距)，那

末這個角就與鉛垂線的方向有關了，鉛垂線近似地通過地心，地球的半徑約等於 6400 公里。因此彼此相距 1 米的兩觀測地點的鉛垂線之間的角等於 $\frac{1\times206,265''}{6,400,000}=0''.03$；這樣的量在某些問題中是不能忽略的。

假若所測量的是任一地上目標的方位角，這目標與觀測者的距離，譬如說，爲 10 公里，那末從儀器上彼此相距僅 10 厘米的兩點至目標的方向之差就已經是一個 $\frac{10\times206,265''}{10^6}=2''$ 的角度；這樣的量在準確的測量中是不能忽略的。

這個問題是這樣解決的，在所有這樣的測量中都要使用儀器，儀器的筒子會繞着兩條軸線而旋轉：一條是豎直的，一條是水平的，爲了消除儀器的不可避免的誤差起見，觀測工作必須這樣地佈置，使由這兩條軸線的交點至目標的方向終於能被確定，或更確切地說，要使由豎直軸線上距水平軸線最近的點至目標的方向能被確定，必須把這一點當作觀測地點。

§2. 球面天文學的課題　在§1中已經講到，確定由觀測地點所見天體方向的相對位置，以及研究這些方向由於各種原因而產生的變化，是可用天球上點的相對位置的研究來代替的。到天球上任一點的天球半徑的方向，是和由觀測者到被觀測的天體或天體的一定點的方向相平行的。

研究球面天文學的問題，自然，是從建立球面坐標系開始，球上點的位置可以用這樣的坐標來確定，這些坐標的測量實際上也就是實用天文學的課題。建立球面坐標系的普遍原則如下。選擇某一通過觀測地點的方向，以及通過天球中心的對應（與所選方向平行的）直線；這個方向具有確定的性質，例如，它可能是由地球引向上的鉛垂線的方向，或是由觀測者到天球北極的天軸的方向等等；我們以字母 A 表示這直線和天球面的交點（圖 2）。設有一個平面，通過天球的中心 O 並且和直線 OA 垂直，另有一個圓周，係由此平面和天球相交而成；顯然，點 A

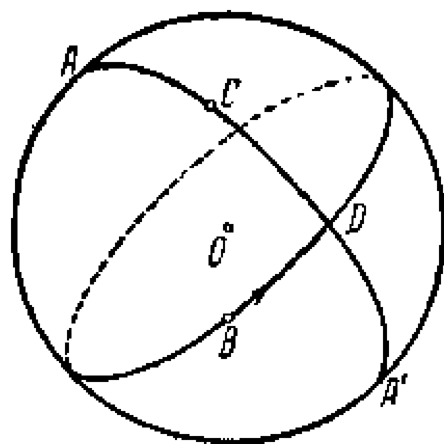


圖 2.

與這個圓周上任一點的距離都是 90°；這個圓周就是坐標系的基本圈。在天文學中一般將天球上和其大圓相距 90° 的一點，叫作這個圓的極❶，顯然，每一個大圓有兩個這樣的點並且它們位於球的同一直徑的兩端；這兩個極有着不同的名稱，以後我們再介紹它們；所以，A 就是上述圓圈的確定的極；在直徑另外一端的極以字母 A' 表示。設想在基本圈上有由某種性質所決定的一點 B。然後設 C 爲球上的任一點。設想有球的半個大圓，由極 A 起經過點 C 而到極 A'；我們將以字母 D 表示這個半圓和坐標系基本圈的交點；我們約定以弧 BD 來確定點 D 在基本圈上的位置，弧 BD 是按一定的方向自點 B 至點 D，例如，這個方向可能是反時針方向的，如果我們是由極 A 來看基本圈的話。於是很清楚地，球上任一點 C 的位置由兩個量來單值地確定：大圓弧 AC 的長，由 0 算到 180°（由 A 至 A'），而弧 BD 的長，由 0 算到 360°；這兩個弧 AC 和 BD 就是這種球面坐標系中點 C 的坐標。

在天文學中使用幾種這樣的坐標系；它們互相間所不同的是基線 OA 的方向，因而也就是基本圈的位置，它們是根據基本圈而命名的：地平系，赤道系和黃道系；在關於宇宙構造的問題中還應用銀道坐標系。

在地平系中基本方向是鉛垂線，基本圈是地平圈；在赤道系中相應地爲地球自轉軸線的方向和天球的赤道圈；在黃道系中則用黃道圈；在銀道系中，用通過銀河帶中間的圈。

在地平系和赤道系中天體的球面坐標是由觀測確定的；黃道系中的坐標則由赤道系中所測量出的坐標計算而得；黃道坐標應用於計算和研究太陽系中天體的運動。銀道坐標亦由赤道坐標計算而得。

❶ 不要把極的這種意義與幾何學中所用的極的意義相混淆，在幾何學中，所說的極是直線對於圓的極或者平面對於球的極。

坐標系建立以後的課題，自然就是將一種系統的坐標變換爲另一系統的坐標，也就是說，知道了天球上任一點在一種系統中坐標的數值以後，怎樣求出它在另一系統中坐標的數值。顯然，在相當的公式中應當引入這樣的量，它們標明了並且單値地確定了一種系統的基本線和圈對於另一系統的位置。坐標系的建立和坐標變換公式的推導就是球面天文學中開始的部份。

天體在空間的分佈是不斷地隨着時間而變的；因此每一個天體的球面坐標也在改變着；爲了研究它們的運動必須約定，怎樣測量任何兩個現象之間的時間間隔，任意兩個時刻之間的時間間隔，也就是，一般地說，怎樣計算不斷地"消逝"的時間。這個問題是要通過利用天文現象和建立時間計算的原則來解決的，它是球面天文學中接在坐標之後的問題。

§3. 關於觀測到的坐標的改正和將坐標化到同一系統的球面天文學課題 用裝置適當的儀器而觀測到的天體的球面坐標，不能直接應用於理論上的討論和推演；這種球面坐標不能給出作爲理論上探討基礎的那些方向，因而就這種意義來講，它們是不準確的；它們受某些因素的影響而生畸變，應該改正它們以消除這些畸變。這些因素就是：

(1)大氣折射，這就是由天體到觀測者的光線通過地球大氣時，受到折射的現象；由於大氣折射的緣故；觀測者所看見的天體，其方向就與沒有大氣折射時在同一時刻他所應看到的天體方向不同；關於大氣折射問題的研究也是球面天文學的一個課題。

(2)視差，這就是：從兩個不同的觀測地點來看天體，其球面坐標是不同的；由地面上的觀測者到天體的方向，一般說來，是和在同一時刻由地心的假想觀測者到同一天體的方向不相一致的，爲了從理論上研究天體的運動，所需要的正是後面這種地心方向和與之對應的球面坐標。關於視差問題的研究，以及怎樣由屬於地面上觀測地點的坐標(地面坐標)得到地心坐標，也是球面天文學的課題。關於從天體的地心坐

標得到它的日心坐標的問題亦如此，所謂日心坐標就是假想的觀測者或者坐標原點係位於太陽中心的坐標，一般地說，就是關於當觀測地點（眞的或假想的）改變時坐標變化的問題。

（3）光行差，這就是由觀測者到天體的眞方向的變化，變化的原因是觀測者在運動着，而另一方面，光並不是立刻就傳達觀測者的。因爲光行差的緣故，所得到的是天體的視坐標而不是眞實的坐標；所觀測到的正是天體的這種視位置，在球面天文學中就要研究怎樣由視坐標變換爲眞坐標的問題。

當我們注意到這三種因素並從直接觀測到的天體坐標中去掉大氣折射，視差和光行差的影響以後，就得到觀測時刻天體的眞地心或日心坐標。它們就是在觀測時刻屬於赤道坐標系的坐標。

然而地球自轉軸線的方向並不是固定的；它在隨着時間而變，因此這個坐標系的極和基本平面（天球赤道平面）的位置也在變化着；這就是所謂的歲差和章動現象。因爲坐標系的基本線和基本平面的方向在變化着，坐標系本身就隨時在變，所以就不能把在不同時刻的天體的球面坐標直接加以比較。因此必須研究坐標系的運動，然後推出一些公式來，根據這些公式，可以通過計算從天體的一個球面坐標求得另一個球面坐標，第一個球面坐標係對在觀測時刻 t 的坐標系位置而言，第二個雖是時刻 t 的天體坐標，然而却是對坐標系在任一其他時間 t_0 的位置而言了。這些問題的解，即所謂把坐標由一個春分點化到另一個春分點，也是球面天文學的一個課題。

只有當直接測出的天體坐標，消除了由所有上述因素而生的變化以後，最後，才能夠確定恆星的自行，而對於太陽系的天體來說，也才能夠得到可以作爲確定軌道之依據的坐標。

也必須解決反面的問題。藉助於多次的觀測就可以作出恆星眞坐標的表，這些坐標是對坐標系在一定時刻的位置而言的。爲了實用天文學的需要，特別是爲了確定地面上（陸上或海上）某地的經緯度，地面

上目標的方位角以及爲了修正時鐘點，必須從恆星的眞坐標預算出未來恆星的視坐標，然後載於天文年曆中。

爲了上述目的而推出的球面天文學公式，也應用於其他許多方面。例如，視差的公式可用以預測日食和月掩星的情況，和確定行星和地球以及恆星和太陽的距離。

§4. 本書的內容　根據上述球面天文學的內容及其所承擔任務的特點，本書包含了上列的內容的各章，然而爲了推導許多公式和利用天文年曆的材料起見，需要有一定的數學知識，爲了清楚地了解某些結論起見，需要有關於地球及其運動的知識，所以在球面天文學本身的敍述之前，加上了第二章和第三章，第二章敍述必需的數學知識，第三章敍述關於地球及其運動的必要的知識。

爲了給學生們一個關於歲差和章動現象的力學本質的概念起見，書末初步地敍述了這現象的動力學，雖然，嚴格說來，這並不是在球面天文學而是在天體力學的範圍了。

第二章　必需的數學知識

§5. 弧和角的量度單位　爲了量度圓周的弧和與其對應的圓心角（它們的頂點與弧的中心相合），應用三種單位：（1）半徑的長，而對於相應的角則爲弧度，（2）度，（3）小時

因爲圓周長度與半徑長度之比等於 2π，所以圓周包含 2π 個長度等於圓的半徑的弧。數 π 爲無理數：它的值等於 3.1415926536…；比這更準確的值，在自然科學中是不用的。對應於長度等於半徑的弧的圓心角，稱爲一個弧度。比一個弧度小的角以弧度的十分之幾或百分之幾等等表示。在數學分析的所有公式裏，弧和角都以這些單位來表示。

在自然科學和技術科學裏，在量度弧及角時使用其他的單位。等於整個圓周的 $\frac{1}{360}$ 的弧，稱爲一度的弧；對應於它的圓心角稱爲一度（°）。小於一度的角以零點幾度表之；但更普遍的是把一度分爲 60 份，每份叫做一分（′），將一分分爲 60 份，每份叫做一秒（″）；小於 1″ 的角以零點幾秒表之。

最後，在天文學中在某些情形下應用第三種單位：小時。一小時（^{h}）等於 15 度；一小時分爲 60 時分（^{m}）；一時分再分爲 60 時秒（^{s}）。因此 $1^m=15'$。$1^s=15''$。根據上述，2π 弧度 $=360$ 度 $=24$ 小時。

由此

$$1\text{ 弧度}=\frac{360^\circ}{2\pi}=57^\circ.2957795=3437'.74677=206264''.806;$$

這些數字的近似值爲：57°.3；3438′；206265″，記住這些數字是有用的；它們，特別是最後一個，在天文計算裏常會遇到。

若一個角的值以弧度表示時爲 x，那末以度表示時其值爲 $57.30\times$ $\times x$，以弧分表示時爲 $3437.7\times x$，以弧秒表示時爲 $206264.8\times x$。在

本書中我們將常常用符號 x°, x', x'' 表示一個角 x 的度數，弧分數，弧秒數，卽 $x^\circ=57^\circ.30\,x$; $x'=3437'.7\,x$; $x''=206264''.8\,x$。

爲了便於將小時，時分及時秒變換爲度，弧分和弧秒及其運算，就作成了表格；它們載於天文年曆中。沒有它們也能行，只要應用

$$15^\circ=1^h;\ 1^\circ=4^m;\ 1'=4^s;\ 1^m=15';\ 1^s=15''。$$

因此，比方說，

$$35^\circ28'25''.0=2^h+(5\times4+1)^m+(13\times4+1)^s+\frac{10^s}{15}=$$
$$=2^h21^m53^s.67;$$
$$3^h11^m18^s.64=(3\times15+2)^\circ+(3\times15+4)'+2.64\times15''=$$
$$=47^\circ49'39''.60。$$

§6. 近似式和近似公式 在天文學中，正如通常把數學應用於自然科學一樣，並不是總需要使用完全準確的公式的，因爲天文學的測量，正如任何其他的測量一樣，不論何時都不是完全準確的，每一次測量都包含着誤差。因此，若近似公式比準確公式簡單時，應用它們是可以的，常常甚至是更好些。但這樣做時必須使它們的誤差不超過某些數值，這些値必須比測量的可能的誤差小得多（例如，小到等於測量誤差的十分之一）。因此，討論幾個近似公式的例子是有用的。

1. 在按某一個小量的升冪將一個函數展開爲級數時，常可以止於級數的不多的頭幾項。此時若只從整個級數中取出一項或兩三項來，那末單獨考慮級數性質就使我們能夠判斷那一種誤差是可以容許的。例如，若 x 的值小到在所討論的問題中可以忽略其二次及較高次的項，那末下列的簡化式是可以容許的：

$$\frac{1}{1\pm x}=1\mp x;\ \frac{1}{(1\pm x)^n}=1\mp nx,\ 等等。$$

2. 在數學分析裏，對於 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ 等三角函數可以推出下列的無窮級數：

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} - \frac{x^7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot2} + \frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} - \frac{x^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \cdots$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots$$

若 x 的值小到可以忽略它的二次及更高次的項，則 $\sin x = x$; $\cos x = 1$; $\tan x = x$; 若只能忽略四次及更高次的項，那末

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6};\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2};\ \tan x = x + \frac{x^3}{3}。$$

這裏假定了 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ 是如同 x 一樣地以半徑爲單位；但也可以像 x 一樣地以其他的單位來表示 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, 例如以弧秒爲單位；爲此，以符號 x''(x', x°)來表示角(或弧) x 的秒(分，度)數時，應將這些公式乘以 $206265''$($3438'$; $57^\circ.3$)，這樣就得到

$$206265''\cdot\sin x = (\sin x)'' = 206265''\cdot x - 206265''\cdot\frac{x^3}{6} + \cdots$$

或

$$(\sin x)'' = x'' - 206265''\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{x''}{206265''}\right)^3 = x'' - \frac{1}{206265^2}\cdot\frac{(x'')^3}{6}\cdots;$$

同樣可得

$$(\tan x)'' = x'' + \frac{1}{206265^2}\cdot\frac{(x'')^3}{3} + \cdots,$$

又

$$(\sin x)^\circ = x^\circ - \frac{1}{57.3^2}\cdot\frac{(x^\circ)^3}{6}\cdots;\ (\tan x)^\circ = x^\circ + \frac{1}{57.3^2}\cdot\frac{(x^\circ)^3}{3}\cdots。$$

由這些級數或者三角函數表之助，即可求出，對於 x 的甚麼值，差數 $x-\sin x$, $1-\cos x$, $\tan x - x$ 不超過給定的小數量，例如 $1''$; $0''.1$; $0''.001$ 等等，並且可以得到下面的表，以後我們有時候將參考這個表。表中指出了 x 的一些值，對於此時可容許的誤差而言，x 在這個值以內時都可以認爲 $\sin x = x$, $\cos x = 1$, $\tan x = x$:

$x-\sin x=$	當 $x=$	$\tan x-x=$	當 $x=$	$1-\cos x=$	當 $x=$
$0^\circ.1$	$12^\circ 33'$	$0^\circ.1$	$9^\circ 57'$	0.1	$25^\circ 51'$
$1'$	6 54	$1'$	5 29	0.01	8 7
$1''$	1 46	$1''$	1 24	0.001	2 34
$0''.1$	0 49	$0''.1$	0 39	0.0001	0 49
$0''.01$	0 23	$0''.01$	0 18	0.00001	0 15
$0''.001$	0 10.7	$0''.001$	0 8.5	0.000001	0 5

3. 若兩個角 x 和 x_0 的差小到在任何問題中都可以忽略差數 $(x-x_0)$ 的二次及更高次的項，那末下列的近似式就是可以容許的：

$$\sin x-\sin x_0=(x-x_0)\cos x=(x-x_0)\cos x_0,$$

$$\cos x-\cos x_0=-(x-x_0)\sin x=-(x-x_0)\sin x_0,$$

$$\tan x-\tan x_0=(x-x_0)\sec^2 x=(x-x_0)\sec^2 x_0\,。$$

這裏差數 $(x-x_0)$ 當然是以弧度來表示的；若 $(x-x_0)''$ 表示角或弧 $(x-x_0)$ 的弧秒數，那末

$$\sin x-\sin x_0=\frac{(x-x_0)''}{206265''}\cos x=\frac{(x-x_0)''}{206265''}\cos x_0 \text{ 等等。}$$

用類似的表示法可得：

$$\sin x-\sin x_0=\frac{(x-x_0)^\circ}{57^\circ.29}\cos x=\frac{(x-x_0)'}{3437'.7}\cos x \text{ 等等。}$$

4. 有時會遇到這種情形：某個值決定於 $x''=a''\sin(A+y)$ 這個式子，其中 a'' 是小的弧秒數，A 局限於 0° 與 360° 之間，y 的值是常數或變數，但不超過某個極限值 y_0。現在問，假若以較簡單的式子 $x''=$ $=a''\sin A$ 來代替這個公式，x 中的最大誤差將是什麼。它們的差是：

$$a''[\sin(A+y)-\sin A]=2a''\sin\frac{1}{2}y\cos\left(A+\frac{1}{2}y\right)。$$

當 $\cos\left(A+\frac{1}{2}y\right)=1$，它的值就是最大的，而當 y_0 是極大時，它就等於 $2a''\sin\frac{1}{2}y_0$。假若，比方說，$a''=120''$，$y_0=2'$，那末 $2a''\sin\frac{1}{2}y_0=$ $=120''\times 2\sin 1'=\frac{240''}{3438}=0''.070$；因此若根據問題的條件可容許的誤

差不能超過 $0''.07$，那末就可以應用較簡單的近似式來代替準確的公式。假若 $a''=60''$ 而 $y_0=1'$，那末 $2a''\sin\frac{1}{2}y_0=0''.018$。

所討論的式子的一個特款是：$x=a\sin(A+x)$。假若 a 等於幾十個弧秒，那末幾乎總可以簡單地寫出 $x=a\sin A$。實際上，當 x 的值很小時我們有：

$$x=a\sin A\cos x+a\cos A\sin x=a\sin A+x\,a\cos A。$$

因此，忽略了 a 的較高次的項，我們可以寫下：

$$x=\frac{a\sin A}{1-a\cos A}=a\sin A+a^2\sin A\cos A+\cdots。$$

因此，x 和 $a\sin A$ 的差只是 $\frac{1}{2}a^2\sin 2A$，在假設 $x=a\sin A$ 時，誤差的最大值只是 $\frac{1}{2}a^2$ 或 $\frac{1}{2}\cdot\frac{(a'')^2}{206265''}$；當 $a''=60''$ 時，它等於 $0''.009$；當 $a''=20''$ 時它等於 $0''.001$。

球面三角學

§7. 球上的圓　從球面概念的定義可知，平面與它相截成圓周，若平面與球面中心的距離愈近，則圓周的半徑愈大；若平面通過中心，則交線稱爲球的大圓，在其他的情形下，稱爲小圓。因爲所有大圓的平面都通過球心，所以任何兩個大圓總相交於一條直徑的兩端。

容易看出，在球面上有兩個這樣的點，每一個到給定的大圓上的任一點的距離都等於 $90°$，它們在垂直於大圓平面的直徑的兩端。在天文學中它們被稱爲這個大圓的極。不應該將它們與幾何學中所用的平面的極相混。我們以後將看到，在每一個別情況下，兩極的名稱互不相同。不難證明下面的關係：（1）在兩個圓的極之間沿着大圓弧的距離等於它們的平面間的交角；（2）若一個大圓通過給定的圓的極，那末它的極就在給定的圓上。

至於球上任一個圓，也可將它視爲與球上某一定點有等距離的點

的軌跡；球上的這一點稱爲這個圓的球心（或極），以別於把它當爲平面上圖形時的中心；從球心到圓上任意點的弧，也就是在球面上的距離，稱爲球半徑，以別於把圓當爲平面上圖形時的直線半徑。顯然，若球的半徑爲 R，球上的圓的球半徑爲 ρ，而其直線半徑爲 r，那末 $r=R\sin\rho$。圓周的長等於 $2\pi r=2\pi R\sin\rho$。

不難證明（應用積分），在大圓與平行於它的球半徑爲 ρ 的小圓之間的球帶的面積等於 $2\pi R^2\cos\rho$，球上小圓之內的面積（或球帽的面積）等於 $2\pi R^2(1-\cos\rho)=4\pi R^2\sin^2\frac{1}{2}\rho$。有時在天文學中球上的面積以平方度來表示；因爲 $R=\frac{360}{2\pi}$ 度，所以 R^2，或平面上邊長爲 R 的正方形的面積，等於 $\left(\frac{360}{2\pi}\right)^2$ 平方度，也就是說，一平方度就是邊長等於 $\frac{2\pi R}{360}$ 的平面上正方形的面積。因此整個球面的面積等於 $4\pi\left(\frac{360}{2\pi}\right)^2=$ $=41252.96$ 平方度。

§8. 球面二角形和三角形 設 A 及 A'（在圖 3 上）爲球面上在直徑兩端的兩點；設應有兩個半大圓，自 A 至 A'；它們將球面分成兩部份，稱爲二角形，按面積而論其中一個小於整個球面的一半，另一個則大於整個球面的一半；若兩個半圓在同一個平面上，它們就相等了。顯然，二角形的面積是用平面角來量度的，兩半圓平面與垂直於 AA'，並與通過球心 O 的平面相交，這樣就構成這平面角，如圖所示，這平面角也可以是在 A 或 A' 點與兩個半圓相切的直線間的交角。我們將用字母 A 表示這個角，以弧度爲單位，而以字母 R 表示球的半徑；顯然，二角形的面積與整個球面積 $4\pi R^2$ 之比，等於 A 與 2π 之比。因此二角形的面積等於 $2AR^2$。

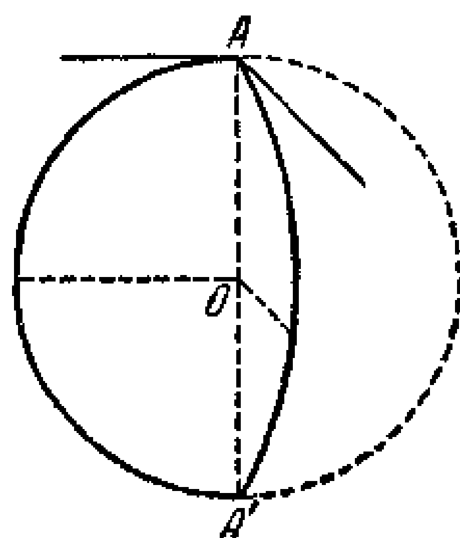


圖 3.

設想（圖 4）在二角形的一邊上有點 B，在另一邊上有點 C，在通過

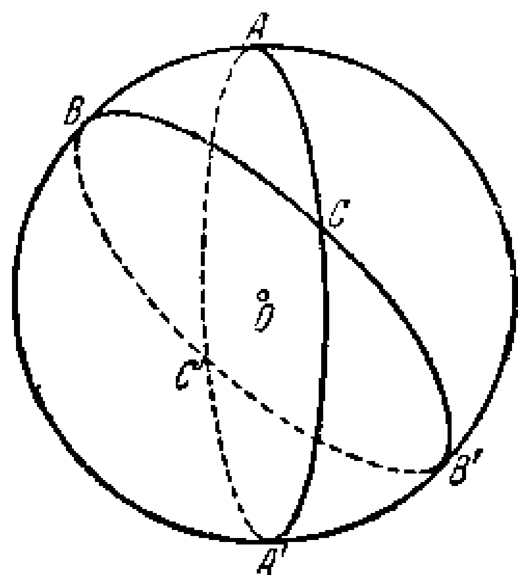


圖 4.

這兩點的直徑的他端有點 B' 及 C'，又設想有大圓通過 B 和 C，因而也通過 B' 和 C'；以半圓 $AB'A'$ 及 $AC'A'$（在向着讀者的半球的後面）補足半圓 ABA' 及 ACA'。連接球上任意三點的三個大圓弧所構成球面上的圖形叫做球面三角形。所以圖 4 上的一些圓就構成了幾個球面三角形。比方說，在向着讀者的以圓 $ABA'B'A$ 爲邊界的半球（包含點 C 的半球）上面，有這些三角形：每邊都小於 90° 的 ABC；$BA'C$，邊 BA' 及 CA' 大於 90°；$CBA'B'AC$，其邊 $BA'B'A$ 及頂角 C 大於 270°，等等。在背着讀者的半球上（有點 C' 的半球），有相應的幾個三角形；在其間三角形 $A'B'C'$ 的邊及角等於三角形 ABC 的邊及角。但是不可能利用三角形 $A'B'C'$ 在球上的位移而使它與三角形 ABC 相重合；可以使 $A'C'$ 與 AC 重合，但那時 B 和 B' 將位於對稱於 AC 的位置；因此不能說這兩個三角形相等，只能說它們的面積相等。

我們規定，兩邊，AC 及 BC，都大於 180° 的圖形，不當作球面三角形。它的邊 AC 及 BC 不僅相交於點 C，而且也相交於點 C'，點 C' 位於通過點 C 的直徑的另一端。

不難理解，在這種條件下任何球面三角形都在球的半面之上。

現在來確定三角形 ABC 的面積（圖 4），角 A, B, C 都小於 180°；以字母 S 表示面積。可以理解，向着讀者的半球面的面積（有頂點 C 的一面），由三部份組成：（1）二角形 $ABA'CA$；其面積爲 $2AR^2$，其中 A 爲頂角 A 的大小；（2）二角形 $BAB'CB$，但減去了三角形 ABC；面積等於 $2BR^2-S$；（3）二角形 $CB'C'A'C$（越入後半球），但減去了三角形 $A'B'C'$，這三角形與三角形 ABC 大小相等；面積等於 $2CR^2-S$。這樣一來，半球的面積 $2\pi R^2$，等於這三部份之和，即

$$2\pi R^2=2AR^2+(2BR^2-S)+(2CR^2-S);$$

由此，　　$S=(A+B+C-\pi)R^2$（角以弧度表之）。

若角 A, B, C 以度表示，那末

$$S=(A+B+C-180^\circ)\frac{\pi}{180^\circ}R^2。$$

這個公式對於任何球面三角形都成立。譬如，三角形 $BA'CB$ 的面積 σ 等於二角形 $ABA'CA$ 的面積減去面積 S，即

$$\sigma=2AR^2-(A+B+C-\pi)R^2=[A+(\pi-B)+(\pi-C)-\pi]R^2,$$

但 A, $(\pi-B)$, $(\pi-C)$ 爲三角形 $BA'CB$ 的角；同樣地角及邊都大於 270° 的三角形 $CBA'B'AC$ 的面積 σ 爲半球及三角形 ABC 的面積之差，即

$$\sigma=R^2[2\pi-(A+B+C-\pi)]=$$
$$=R^2[(\pi-A)+(\pi-B)+(2\pi-C)-\pi],$$

但 $(\pi-A)$, $(\pi-B)$, $(2\pi-C)$ 就是三角形 $CBA'B'AC$ 的角。

因爲面積在本質上是正的量，所以 $A+B+C\geqslant\pi$；因爲面積 S 不大於半球的面積，所以 $A+B+C-\pi<2\pi$ 或 $A+B+C<3\pi$，也就是說三角形的角的和大於 180° 而小於 540°。數值 $(A+B+C-\pi)$ 稱爲三角形的角盈。

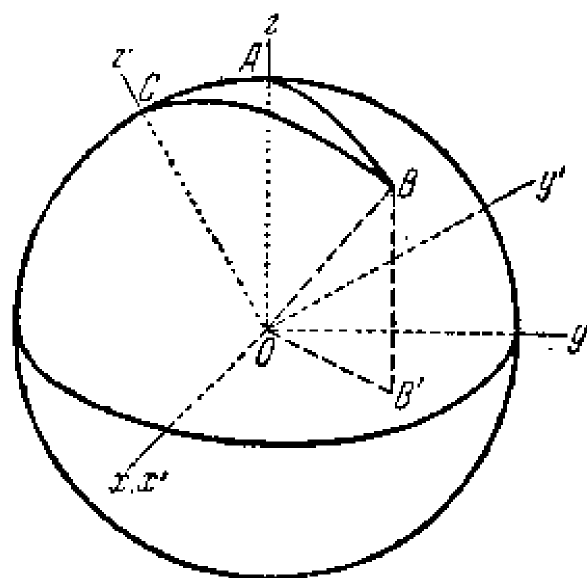


圖 5.

§9. 球面三角形的基本公式　爲了要解決球面天文學的各種問題，必須推出一些與球面三角形的邊長及角的值有關的公式；這種推導就是球面三角學的對象。沒有一邊超過 90° 的三角形位於半球的一個象限內，所以只要推出這種三角形的公式就夠了；以後可以證明它們適用於任何三角形。

考慮（參閱圖 5）以點 O 爲中心的球，及其上的球面三角形 ABC。

以字母 a, b, c 表示邊及其長，以字母 A, B, C 表示角及其值。考慮以點 O 爲原點的直角直線坐標系；z 軸的方向沿着直線 OA，設 y 軸在 OCA 平面上，x 軸垂直於 y 及 z 軸。取球的半徑爲單位，求點 B 的直角坐標。設 B' 爲 B 在 xy 平面上的投影；$OB'=\sin AB=\sin c$；根據兩面角的測量法，OB' 與 y 軸的交角等於 $180°-A$；OB' 與 x 軸的交角等於 $90°-(180°-A)=A-90°$。因此根據解析幾何的定理不難理解

$$x=\sin c\sin A;\quad y=-\sin c\cos A;\quad z=\cos c\text{。}$$

現在設想另一個坐標系 x', y', z'，原點也在 O，x' 軸與 x 軸相重合，而 z' 軸則與直線 OC 相重合；因此，y' 軸與 y 軸的交角等於 b。完全和以前類似，我們得到了

$$x'=\sin a\sin C;\quad y'=\sin a\cos C;\quad z'=\cos a\text{。}$$

但根據平面上原點共有但軸線方向不同的坐標變換的公式（參考解析幾何）得：

$$x'=x;\quad z'=z\cos b-y\sin b;\quad y'=y\cos b+z\sin b\text{。}$$

將已求出的 x, y, z, x', y', z' 的式子代入這些等式，得

$$\sin a\sin C=\sin c\sin A,$$

$$\cos a=\cos c\cos b+\sin b\sin c\cos A,$$

$$\sin a\cos C=-\sin c\cos A\cos b+\cos c\sin b\text{。}$$

因爲邊和角以及它們的大小用一定的字母去表示是完全任意的，所以可以用字母 b 及 B（或 c 及 C）去表示 a 邊及 A 角，然而相反地，也必須寫下 a 及 A 以代替 b 及 B（或 c 及 C）。用這樣的替代或字母的循環排列卽可得到下列球面三角形的基本公式：

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C},\tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos a&=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A,\\ \cos b&=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos B,\\ \cos c&=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C,\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\sin a\cos B&=\cos b\sin c-\sin b\cos c\cos A,\\ \sin a\cos C&=\cos c\sin b-\sin c\cos b\cos A。\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

類似地可以寫出 $\sin b\cos A$ 和 $\sin b\cos C$，以及 $\sin c\cos A$ 和 $\sin c\times\times\cos B$ 的公式。

我們將常常遇到這些公式，因此把它們熟記在心裏是有用的。

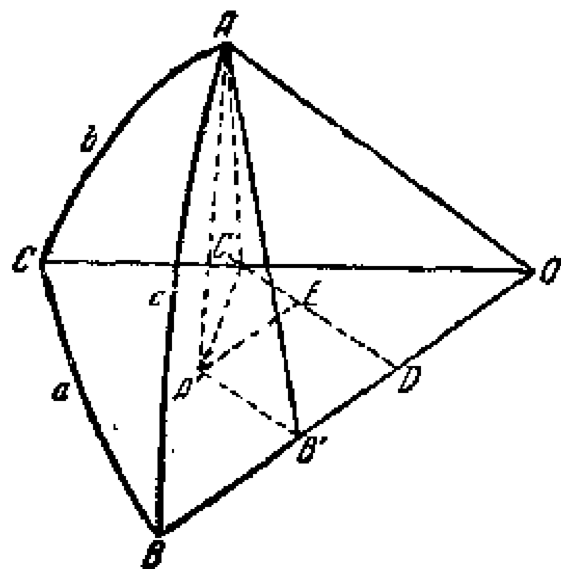


圖 6.

基本公式也可以從平面三角的公式推出。設圖 6 中的 ABC 爲球面三角形，O 爲球心。自頂點 A 作垂線 AA' 於 BOC 平面上。經過 AA' 作兩個平面，一個垂直於直線 OB（交點爲 B'），另一個垂直於直線 OC（交點爲 C'）。自 C' 點作直線 $C'D$ 垂直於直線 OB，自 A' 點作直線 $A'E$ 垂直於直線 $C'D$。我們知道角 AOB' 等於 c；角 AOC' 等於 b；角 $AB'A'$ 爲 B；角 $AC'A'$ 爲 C；角 $A'C'D$ 等於 a。於是，由各個平面三角形得：

$$AB'=OA\sin c;\quad AC'=OA\sin b;$$

$$AA'=AB'\sin B=AC'\sin C。$$

因此 $$OA\sin c\sin B=OA\sin b\sin C$$

或 $$\sin c\sin B=\sin b\sin C,$$

此卽公式（1）。

而且，一方面 $$OB'=OA\cos c,$$

另一方面 $$OB'=OD+DB',$$

但是 $$OD=OC'\cos a=OA\cos b\cos a,$$

而 $$DB'=A'E=A'C'\sin A'C'E=A'C'\sin a=$$

$$=AC'\cos C\sin a=OA\sin b\cos C\sin a。$$

因此 $$OB'=OA\cos c=OA\cos b\cos a+OA\sin b\sin a\cos C,$$

此卽公式（2）。

更進一步地，一方面，

$$A'B' = AB' \cos B = OA \sin c \cos B,$$

而另一方面，

$$A'B' = ED = C'D - C'E,$$

但是　$$C'D = C'O \sin a = OA \cos b \sin a,$$

$$C'E = A'C' \cos A'C'E = AC' \cos C \cos a = OA \sin b \cos C \cos a\text{。}$$

因此

$$A'B' = OA \sin c \cos B = OA \cos b \sin a - OA \sin b \cos a \cos C,$$

此卽公式(3)。

在我們的推導中，三角形的邊都小於 $90°$；但顯而易見，這些公式也適用於邊大於 $90°$ 的三角形。在圖4中，就有這樣的三角形 $BA'C$。在其中 $CA' = b' = 180° - b$；$BA' = c' = 180° - c$；角 $BCA' = C' = 180° - C$；角 $CBA' = B' = 180° - B$；角 $A' = A$。因此 $b = 180° - b'$；$c = 180° - c'$；$a = a'$；$C = 180° - C'$；$B = 180° - B'$；$A = A'$。

將 a, b, c, A, B, C 的這些值代入公式(1)，(2)，(3)，得

$$\frac{\sin a'}{\sin A'} = \frac{\sin b'}{\sin B'} = \frac{\sin c'}{\sin C'},$$

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A',$$

$$\sin a' \cos B' = \cos b' \sin c' - \sin b' \cos c' \cos A',$$

這些公式與公式(1)，(2)，(3)恆等。

假若三角形的一邊及其對角大於 $180°$，例如圖4中的三角形 $CBA'B'AC$，那末我們將以字母 A', B', C' 表示其中的頂角 A, B, C，以字母 c', b', a' 表示邊 $BA'B'A$，CA，CB；於是與三角形 ABC 比較就得：

$$c = 360° - c';\quad b = b';\quad a = a';\quad A = 180° - A';$$

$$B = 180° - B';\quad C = 360° - C'\text{。}$$

將 a, b, c, A, B, C 的這些值代入公式(1)，(2)，(3)卽得：

$$\frac{\sin a'}{\sin(180^\circ - A')} = \frac{\sin b'}{\sin(180^\circ - B')} = \frac{\sin(360^\circ - c')}{\sin(360^\circ - C')},$$

$$\cos(360^\circ - c') = \cos b' \cos a' + \sin b' \sin a' \cos(360^\circ - C'),$$

$$\sin a' \cos(180^\circ - B') = \cos b' \sin(360^\circ - c') - \\ - \sin b' \cos(360^\circ - c') \cos(180^\circ - A'),$$

這些公式與公式(1),(2),(3)完全類似。

從基本公式還可以容易地得到下列公式。

在公式(3)的第一式中將 $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$ 換爲與之成正比[根據公式(1)]的 $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$; 則得:

$$\sin A \cos B = \cos b \sin C - \sin B \cos c \cos A,$$

或者把它寫成常見的形式:

$$\sin C \cos b = \cos B \sin A + \sin B \cos A \cos c,$$

或者把字母 A 和 a 以及 C 和 c 互換,得:

$$\sin A \cos b = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a, \tag{4}$$

這就是與公式(3)裏的第一式類似的公式,但那個式子裏的邊已被角代替了,角則被邊代替了,且以此式右邊第二項的"+"號代替了公式(3)裏的"−"號。同樣可以寫出 $\sin A \cos c$, $\sin B \cos a$, $\sin B \cos c$, $\sin C \cos a$ 的公式來。

更進一步寫出與(4)式同型的兩個公式:

$$\sin A \cos b = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a$$

和

$$\sin B \cos a = \cos A \sin C + \sin A \cos C \cos b,$$

從這兩式消去 $\cos b$; 爲此將第一式乘以 $\cos C$ 並與第二式相加。得:

$$\sin A \cos C \cos b + \sin B \cos a = \cos B \sin C \cos C + \\ + \sin B \cos^2 C \cos a + \cos A \sin C + \sin A \cos C \cos b 。$$

消去有 $\cos b$ 的項並將有 $\cos a$ 的項集於左邊,得:

$$\sin B \cos a (1 - \cos^2 C) = \cos B \sin C \cos C + \cos A \sin C,$$

在上式中，以 $\sin^2 C$ 代 $1-\cos^2 C$，消去 $\sin C$ 並移項，即得 $\cos A$ 的普通形式的式子

$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a, \tag{5}$$

也就是與(2)類似的公式，角和邊互換，不過右邊第一項的"－"號已代替了公式(2)中的"＋"號。

以公式(1)中的第一式除公式(3)中的第一式得

$$\sin A\cos B=\sin B\cot b\sin c-\sin B\cos c\cos A$$

再除以 $\sin B$ 得:

$$\sin A\cot B=\cot b\sin c-\cos c\cos A。 \tag{6}$$

變換字母並移項，即得另一些類似的公式，例如:

$$\sin a\cot b-\cot B\sin C=\cos a\cos C \text{ 等等。}$$

已推出的公式是球面三角學中基本的，用得最多的一些公式。在實際的計算中照這裏所給出的形式去應用它們並不老是方便的；有時應將它們變換成或從它們推出另一些對於計算更方便的式子。我們無須仔細地討論這些變換，但其中一些在天文問題中是用得到的，將在§12裏指出來。

下面還給出了達朗柏爾(Delambre)公式，因證明相當複雜，我們在這裏不去證明了；它們甚便於解題，在這種題中給出的是邊及其隣角或角及其隣邊，要求的是三角形的其他部份。

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}(B-C)&=\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}(b+c),\\ \sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}(B-C)&=\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}(b-c),\\ \cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}(B+C)&=\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}(b+c),\\ \cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}(B+C)&=\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}(b-c)。\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

由它們即可容易地得到所謂的訥比爾(Napier)類似式:

$$
\left.\begin{aligned}
\tan\frac{1}{2}(b+c) &= \frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}(B+C)}\tan\frac{1}{2}a,\\
\tan\frac{1}{2}(b-c) &= \frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}(B+C)}\tan\frac{1}{2}a,\\
\tan\frac{1}{2}(B+C) &= \frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)}\cot\frac{1}{2}A,\\
\tan\frac{1}{2}(B-C) &= \frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}(b+c)}\cot\frac{1}{2}A。
\end{aligned}\right\}\quad(8)
$$

還有許多其他的，常常外表十分優美的球面三角學的公式，但是我們以後並不需要它們。

§10. **直角球面三角形**　若在球面三角形中有一個角等於90°，那末三角形就叫做直角球面三角形，對着直角的邊叫做斜邊，其他的邊叫做腰。在球面天文學中常常遇見這樣的三角形，因此推導一些有關它們的公式是有用的。假設，$A=90°$；於是從已求出的公式不難得到：

從(1)

$$\sin a=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}\ \text{或}\ \sin b=\sin a\sin B,\qquad (a)$$

從(2)及(5)　$\cos a=\cos b\cos c=\cot B\cot C,\qquad (b)$

從(3)　$\sin a\cos B=\cos b\sin c,\qquad (c)$

從(6)　$\tan b=\sin c\tan B,\qquad (d)$

從(9b)及(9c)　$\tan c=\tan a\cos B,\qquad (e)$

從(9e)，(9a)，(9b)

$$\cos B=\frac{\tan c}{\tan a}=\frac{\sin c}{\sin a}\cdot\frac{\cos a}{\cos c}=\cos b\sin C。\qquad (f)$$

(9)

可用 c, C 去代替 b, B, 但同時以 b, B 代 c, C。訥比爾或莫竹亞定則有助於記憶這些公式。設想五個值：b, c, $90°-B$, $90°-a$, $90°-C$ 依序分佈於圓周上。對於每一個值有兩個近的和兩個遠的值。於是任何一值的正弦等於:(1)相鄰兩值正切的乘積,(2)相遠兩值餘弦的乘積。

問題 我們將解出下列的問題作爲應用已推出的公式的例子,這個問題我們將不只一次地引用它:在球上給定兩個點 A 和 B; 求點 C 的軌跡,使在球面三角形 ABC 中,角 C 總是直角。設 M 爲大圓弧 AB 的中點;我們以 a 表示 $AM=MB$; 取弧 $MC=\rho$ 以及角 $AMC=\theta$ (讀者自己可以容易地畫一個簡單的圖)作爲點 C 的流動坐標。根據條件, $\cos 2a=\cos AC\times\times\cos BC$, 並由三角形 AMC 和 BMC 中得:

$$\cos AC=\cos a\cos\rho+\sin a\sin\rho\cos\theta;$$

$$\cos BC=\cos a\cos\rho-\sin a\sin\rho\cos\theta,$$

因此

$$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=\cos^2 a\cos^2\rho-\sin^2 a\sin^2\rho\cos^2\theta=$$

$$=\cos^2 a-\sin^2\rho(\cos^2 a+\sin^2 a\cos^2\theta),$$

由此

$$\sin^2 a=\sin^2\rho(\cos^2 a+\sin^2 a\cos^2\theta),$$

最後

$$\sin^2\rho(1+\tan^2 a\cos^2\theta)=\tan^2\alpha;$$

這就是所求的曲線的方程式;不難理解,它的位置對於弧 AB 以及通過 M 點而垂直於它的弧都是對稱的,它的中心在 M,而且它在 A 及 B 點與 AB 弧以直角相交。設想,將它的點都垂直地投影在與球相切於 M 點的平面上;我們以 A', B', C' 表示點 A, B, C 的投影; 取 M 爲坐標原點,取直線 MA' 爲 x 軸,取垂直於 x 軸的直線爲 y 軸; 設球的半徑等於單位。這麼一來點 C' 的坐標爲: $x=\sin\rho\cos\theta$, $y=\sin\rho\sin\theta$, 投影的方程式爲: $x^2+y^2+x^2\tan^2 a==\tan^2 a$; 這是一個橢圓的方程式,橢圓的軸爲 $\sin a$ 及 $\tan a$, 偏心率爲 $\sin a$。請再解出問題: 已求出的球面曲線在同一平面上的中心投影的形狀是什麼。請再注意這一章裏的問題。已求出的球面曲線並無特別的名稱, 但爲了簡便起見我們將稱它爲: "曲線 $A\,90°\,B$"。不難證明,這條曲線在和球面相切於點 A(或點 B) 的平面上的中心投影是一個圓周。

§11. 一邊等於 90° 的球面三角形 在球面天文學中也常常遇到這樣的三角形, 因此推出一些關於它的公式來是很有用的。假設 $a==90°$,那末由普通的公式得:

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{從(1)} & \sin A=\dfrac{\sin B}{\sin b}=\dfrac{\sin C}{\sin c}, & \text{(a)}\\
\text{從(2)及(5)} & \cos A=-\cot b\cot c=-\cos B\cos C, & \text{(b)}\\
\text{從(4)} & \sin A\cos b=\cos B\sin C, & \text{(c)}\\
\text{從(10a)及(10c)} & \tan B=\tan b\sin C, & \text{(d)}\\
\text{從(10b)及(10c)} & \tan C=-\tan A\cos b, & \text{(e)}\\
\text{從(2)} & \cos b=\sin c\cos B\text{。} & \text{(f)}
\end{array}\right\}\quad(10)$$

可以用 c, C 去代替 b; B; 同時以 b, B 代替 c, C。

假若在圓周上依下面的次序安置五個量: B, C, $90°-b$, $A-90°$, $90°-c$, 那末就可以根據訥比爾或莫竹弧定則求得這些公式(參閱§10)。

我們看出,這些公式很像直角三角形的公式;所不同的只是邊與角互換了,並且在某些公式中"－"號代替了"＋"號。容易證明,若在三角形中兩邊是 $90°$, 那末它們所對的角都是直角; 相反地, 若在三角形中有兩個直角,那末這兩個角所對的邊都是 $90°$。

§12. 運算技術的要點 在球面天文學中,球面三角公式是用來由已知量計算出未知量。要無錯地快速地計算需要有特殊的本領,這並不是所有的人都具有的,但除去它以外在計算時還得遵守一些規則,這些規則對於每一計算都是必需的:巧妙的計算區別於笨拙的計算的地方,首先是它能嚴格地應用這些規則。對此對某些規則的簡短而初步的介紹並非多餘的,雖然這一節無論在何種程度上都不足以代替天文計算技術的專門化課程。

在球面天文學中必須計算圓弧及角,計算時根據它們的三角函數:正弦,餘弦,正切等等。必須儘量利用正切而求出未知的弧及角,無論正切的值如何;若角接近 $0°$ 或 $180°$ 時,也可以利用正弦來計算,若角接近 $90°$ 或 $270°$, 則用餘弦來計算。這常是可能的,但並不老是可能的。例如,假設,在直角三角形中已給斜邊 a, a 接近 $90°$, 譬如說是 $70°$, 以及角 B, 角 B 接近 $90°$, 譬如說是 $70°$, 所需要計算的是邊 b 及 c。可以根據公式 $\sin b=\sin a\sin B$ 而計算 b, 進一步根據公式 $\cos a=\cos b\cos c$ 而計算 c, 但這樣就必須由正弦計算大弧 b, 由餘弦而計算小弧 c。這是可以避免的,譬如,可以用公式 $\tan c=\tan a\cos B$ 去計算 c, 然後用公式 $\tan b=$ $=\tan c\tan B$ 去計算邊 b。但這樣做我們無法查驗計算的結果。因而採用下面的一組公式更好些:

$$\sin c\cos b=\sin a\cos B,$$
$$\cos c\cos b=\cos a$$

首先由公式 $\tan c=\tan a\cos B$ 中求出 c, 然後由第一和第二式中求出 $\log\cos b$, 看看這兩個對數是否相同,而給出同一個 b 值;這就可以巡算自知了。上述是與未知量有關的。

相反地，也可以應用某些適當的公式，在這些公式中給定的角及邊以這樣的三角函數而出現，當角或弧變化時這些三角函數的變化很小，譬如角度接近 90° 時以正弦出現，角度接近 0° 或 180° 時以餘弦出現，這時已知量中不可避免的誤差（這些已知量在實踐中總是由觀測得來的，而觀測總不會是絕對準確的）對於這些三角函數將無大的影響；然而並非在任何問題中都可以建立這樣的公式。在任何問題中計算者不應該盲目地採用任何公式，或者任何他所記住的公式，而應該選擇在他的問題中比較便利的一組公式。

有時變換公式是有用的。例如假設根據已知的 a, b, C 而要計算 c；若根據問題的條件，c 邊並不小也不接近 180°，那末可以應用（2）組的第三個公式，但若 c 是小的，那末最好是用下面的方法來變換公式：

$$1-\cos c=2\sin^2\frac{1}{2}c=1-\cos a\cos b-\sin a\sin b\left(1-2\sin^2\frac{1}{2}C\right)=$$

$$=1-\cos(a-b)+2\sin a\sin b\sin^2\frac{1}{2}C=$$

$$=2\sin^2\frac{1}{2}(a-b)+2\sin a\sin b\sin^2\frac{1}{2}C,$$

最後

$$\sin^2\frac{1}{2}c=\sin^2\frac{1}{2}(a-b)+\sin a\sin b\sin^2\frac{1}{2}C。\tag{11}$$

假若 c 接近 180°，這個公式就不方便了。對於這種情形由 1 減去最後的公式的兩邊；於是

$$\cos^2\frac{1}{2}c=\cos^2\frac{1}{2}(a-b)-\sin a\sin b\sin^2\frac{1}{2}C。\tag{12}$$

若 $c<90°$，可根據公式(11)而計算，若 $c>90°$，可根據公式(12)而計算。

作為第二個例子，我們設已知邊 a, b, c 所需要計算的是角。這時以下面的形式採用公式(11)是方便的：

$$\sin a\sin b\sin^2\frac{1}{2}C=\sin^2\frac{1}{2}c-\sin^2\frac{1}{2}(a-b)=$$

$$=\left[\sin\frac{1}{2}c+\sin\frac{1}{2}(a-b)\right]\left[\sin\frac{1}{2}c-\sin\frac{1}{2}(a-b)\right]=$$

$$=2\sin\frac{1}{4}(a-b+c)\cos\frac{1}{4}(c-a+b)\,2\sin\frac{1}{4}(c-a+b)\cos\frac{1}{4}(c+a-b)=$$

$$=\sin\frac{1}{2}(c+a-b)\sin\frac{1}{2}(c-a+b),$$

因而，

$$\sin^2\frac{1}{2}C=\frac{\sin(S-a)\sin(S-b)}{\sin a\sin b},\tag{13}$$

其中

$$S=\frac{1}{2}(a+b+c)。$$

同樣可推得公式

$$\cos^2\frac{1}{2}C=\frac{\sin S\sin(S-c)}{\sin a\sin b} \tag{14}$$

兩式相除後得，

$$\tan^2\frac{1}{2}C=\frac{\sin(S-a)\sin(S-b)}{\sin S\sin(S-c)}。 \tag{15}$$

根據同樣的方法可以寫出角 A 及 B 的類似的公式。順便提一下，各公式已被化爲對數的形式，但原來的目的是，若角不大時就不由餘弦而確定 C。若它小於 90°，就必須應用公式(13)或(15)，若 $C>90°$，就應用公式(14)或(15)。由草圖總可以預先看出未知量的近似值爲何，這樣的草圖是與問題中給定的量相對應的，作了出來總是有用的。

上面所說的可以適用於對數計算，同樣亦適用於計算機的計算，近來計算機是用得愈來愈多了。在許多情形下寧可使用它們而不用對數：用它們計算進行得快且需要較少的注意力；顯然，用它們時必須有三角函數自然數值的表，這樣的表近年來已經出版了。然而對數也有優於計算機的地方：(1)便宜，(2)不會損壞，(3)不會發生錯誤。

常常一個公式裏只有兩項相加或相減。用計算機計算時，這種情形不會發生困難，只是應該會安排個別的運算。例如，假設，當 a 及 b 不變時，對於角 C 的幾個値要計算 $\cos a\cos b+$ $+\sin a\sin b\cos C$ 的幾個值。我們就計算 $\sin a\sin b$ 的値並且暫時把它寫下來；然後計算 $\cos a\cos b$ 並把它留在框架的右部；用按鈕排好所記下的 $\sin a\sin b$，把 $\sin a\sin b$ 與 $\cos C$ 的依序的乘積加於留在框架上的 $\cos a\cos b$；此時 $\cos C$ 被排在框架的左邊。

假設是用對數計算，那末最方便的辦法是應用和及差的對數表；它們很省時間和勞力，計算者應當像用普通對數一樣容易地使用它們。如果沒有對數表，就必須把對數變爲數目，再加或減它們，然後取和或差的對數；這樣所需的時間就長一些了。可以把同類的公式化爲對數的形式。例如，要求出(2)和(3)型公式右邊的對數：

$$\left.\begin{aligned}\cos a&=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A,\\ \sin a\cos B&=\cos b\sin c-\sin b\cos c\cos A。\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

引入輔助的量 m 和 N，使

$$\left.\begin{aligned}m\cos N&=\cos b,\\ m\sin N&=\sin b\cos A\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

計算 m 和 N。根據 $\tan N=\tan b\cos A$ 來計算角 N，然後由(17)的兩個公式計算 m，兩式應給出相同的 m 值，這可以作爲計算的查驗。這兒 $\sin b$ 總是正的$(0°<b<180°)$，而 $\cos b$ 和 $\cos A$ 中的每一個量可以互不相干地 <0 或 >0。在量 $\cos b$ 和 $\cos A$ 之間，"+"及"−"號的分佈有四種情形，在這四種中作簡單的選擇（我們建議讀者進行這種選擇），可以告訴我們，或者(1)在所有情形中可設 $m>0$，於是 N 在不同的情形下可以在第一至第四的任一象限中，或者(2)對於角 N 可以任意選擇兩個相鄰的象限：例如第1和第4，或第1和第2，於是所得的 m 或 <0 或 >0。在對於 m 和 N 的每一個這樣的條件下，最後兩方程式(17)就完全確定了 m 和 N。當 m 和 N 算出後，我們的公式(16)就變成

$$\cos a = m \cos c \cos N + m \sin c \sin N = m \cos(c-N),$$

$$\sin a \cos B = m \sin c \cos N - m \cos c \sin N = m \sin(c-N)。$$

在兩式右邊我們得到了對數式。

但不止此。若將三角形的第三個公式：$\sin a \sin B = \sin b \sin A$ 歸併於這些公式，就得到：

$$\frac{\sin a \sin B}{\sin a \cos B} = \frac{\sin b \sin A}{m \sin(c-N)}$$

且因為

$$\frac{\sin b}{m} = \frac{\sin N}{\cos A},$$

所以

$$\tan B = \frac{\sin N \tan A}{\sin(c-N)}$$

而且

$$\frac{\sin a \cos B}{\cos a} = \tan(c-N),$$

所以

$$\tan a = \frac{\tan(c-N)}{\cos B}。 \tag{18}$$

這樣一來 a 和 B 都由它們的正切計算出來。因為 $\tan B$ 和 $\tan a$ 的公式中不含量 m，所以角 N 可根據 $\tan N = \tan b \cos A$ 算出，若 $\tan N > 0$ 則在第一或第三象限中，若 $\tan N < 0$ 則在第二或第四象限中。

在做兩個對數的加法時，養成由左向右地相加的習慣是有用的；這並不像初看起來的那樣難。若需加三個或更多的對數時，那末利用算盤是很有用的。查驗總是有用的；例如先順着加法次序加一次，然後再把次序顛倒過來加一次，像這樣的驗算是有好處的。如果沒有算盤且需把 4 個數加起來時，先把第一與第二數相加，再把第三與第四數相加，然後把兩個和數加起來，這樣就可以加得快一些；為了查驗起見，最初必須將第一與第四數相加，然後將第二與第三數相加，再求出兩和數之和。

如果(用代數加法)被加的對數的數目大於二，那末必須將被減的對數代以到 10 的補數，並將這些附加數與別的對數相加；必須記住，在對數表中給出了它們的到 10 的補數(除去大於 45° 的角的正切的對數以及小於 45° 的角的餘切的對數以外)。

如果需要組成量 a 及 b 的半和及半差，那末簡單的查驗總是必須的，查驗的方法是，由 $\frac{1}{2}(a+b)$ 及 $\frac{1}{2}(a-b)$ 的和應該得到 a，由它們的差應該得到 b。通常，這一點必須在長的計算之初來做，在這樣簡單的計算中如果在長的計算的末了而非在其初發現誤差是非常討厭的事。

根據這樣的公式來查驗是十分有用的，在這些公式中含有某些原始的，給定的量，也含有在過程之中或計算之末了所得到的量。例如，如果應用公式(17)和(18)由方程式(16)中算出了量 a 和 B，那末查驗一下是否準確地得到了下列的等式是有用的：$\frac{\sin a \cos B}{\sin b \cos A} = \frac{\sin(c-N)}{\sin N}$，這可由上述的公式推出來。

類似的查驗比再計算第二次更能使人相信沒有誤差。然而查驗公式在最後一個小數位

1—2 單位的誤差，或者更準確地說，在由被應用的對數得出的在角的數量裏 1—2 單位的誤差(用五位對數表就是一角度分的十分之一到十分之二)，那是可以的，因爲在計算過程裏常把最後一位數取消，所以那種誤差是在期望中的。

在未帶有比例部份的對數表和在計算末了得出多餘數位時，都必須適當地取消一些尾數；這樣做時要記住這個規則：如果被拋棄的數字小於 5，則前面的數字保留不變；如果大於 5，則前面一個數字加 1；如果被拋棄的數字是 5，則前面一個數字若爲偶數，就不變，若爲奇數，就加 1。

不同的問題需要不同的計算準確度，所以出版了具有 3，4，5，6，7，有時甚至更多的小數位的三角函數對數表(或自然值的表)。考慮到在計算時最後結果的最後一位可能由於在計算過程中取消末位而錯了一兩單位，我們由表裏找出，在第一象限裏對於 45° 左右由正切確定的角，可能的誤差用 7 位對數可以達到 $0''.05$，用 5 位可以達到 $0'.1$，用 4 位達到 $1'$，用 3 位達到 $0°.1$。對於和 45° 差很多的角，誤差小些；在由正弦定出從 0° 到 45° 的角，和由餘弦定出從 45° 到 90° 的角時，誤差大於上述的數值，但是對於小角，由正弦和由正切定角度的準確度是一樣的；在其他象限裏也有類似的情形。如果準確到三位小數就夠了，則用計算尺計算常是有益的。

爲了計算方便起見，預先擬出一個方案是非常重要的，這就是將個別的數字適當地安排在紙上，這些數字就是當用對數計算時必須相加和相減的，而用計算機計算時是要相乘和相除的。然而要在這一方面給出一般的指示是困難的。

§13. 小的和窄的球面三角形 在球面天文學中很少遇到需要計算到比 $0''.01$ 更準確的情形，因爲由觀測定出的角度的絕對值不可能量得比 $0''.1$ 更準確，計算的準確度則總是等於觀測的 10 倍。僅僅較差測量，即球面坐標的差別的量度，有時進行得準確到 $0''.01$，這時計算就需要大的準確度了。由於這些考慮，應用球面三角形的簡化了的近似公式常常是有益的，然而必須使得那些因簡化而引入的誤差不超過在被研究的問題中可以容許的值。因此我們在這兒研究幾種簡化的情形，這些簡化將用於本書的其他幾章裏。

小球面三角形。小的角及弧的正弦與角及弧本身相差很少。在 §6 中給出了 x 與 $\sin x$，x 與 $\tan x$，1 與 $\cos x$ 之間的差，這些差決定於 x 的值。假若對於所需要的計算準確度來說，$\frac{x^3}{6}$ 的值可以當作第 3 級的小量而被忽略不計，那末球面三角形就可以當作是平面的。這麼一來

如在平面三角形一樣就有 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$；公式

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$$

就變爲
$$1-\frac{a^2}{2}=\left(1-\frac{b^2}{2}\right)\left(1-\frac{c^2}{2}\right)+b\,c\cos A$$

或
$$1-\frac{a^2}{2}=1-\frac{b^2}{2}-\frac{c^2}{2}+\frac{b^2c^2}{4}+bc\cos A,$$

或者，把 $\frac{1}{4}b^2c^2$ 當作第 4 級的小量而忽略不計，卽得 $a^2=b^2+c^2-2bc\times\times\cos A$，如在平面三角裏一樣。完全一樣地，公式 $\sin a\cos B=\cos b\times\times\sin c-\sin b\cos c\cos A$ 變換成爲：$a\cos B=c-b\cos A$，如在平面上一樣。在這種情形下三角形的邊的極限值如何，是決定於所要求的準確度或者可容許的誤差的值(參考 §6，表)的。

窄球面三角形。我們時常遇到窄的球面三角形，這樣的三角形的一邊 a 與其他的邊 b 和 c 比起來是小的，因而角 A 也是小的；此時所給的是：小邊 a，與其相隣的角 B 及邊 c，需要計算的是角 A 及邊 b 或者最好是邊的差 $c-b$。這時不必用準確的公式去求 $c-b$ 及 A，可以用較簡單的近似公式去求出它們，而且這樣做是方便的，在這些公式中所給出的可能是第一次或第二次的近似，把量 a，$(c-b)$ 及 A 當作第一級的小量。

(3)組中的一個準確公式是：

$$\sin a\cos B=\cos b\sin c-\sin b\cos c\cos A=$$
$$=\sin(c-b)+2\sin b\cos c\sin^2\frac{1}{2}A\,。\tag{19}$$

若 A 夠小，那末右邊第二項在第一次近似裏就可以忽略不計，這樣卽得：$\sin(c-b)=\sin a\cos B$。假若 a，因而$(c-b)$都是小的，它們的正弦可用弧去代替，所生的誤差是可以容許的，那末

$$(c-b)_1=a\cos B\,。\tag{20}$$

符號 1 表示，這是第一次近似的公式。根據上述的 §6 中的表，假使可

容許的誤差小於 0″.001，那末 a 可能小於 11′；若誤差小於 0″.01，那末 $a<23'$，若誤差小於 0″.1，那末 $a<49'$。

由準確公式 $\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\sin a}{\sin b}$，令 $b=c-(c-b)$，卽得：

$$\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\sin a}{\sin[c-(c-b)]}=\frac{\sin a}{\sin c\cos(c-b)-\cos c\sin(c-b)}。$$

準確到第一級的量，可以取：

$$\cos(c-b)=1,\ \sin(c-b)=c-b。$$

於是

$$\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\sin a}{\sin c-(c-b)\cos c}=\frac{\sin a}{\sin c}\cdot\frac{1}{1-(c-b)\cot c}=$$

$$=\frac{\sin a}{\sin c}[1+(c-b)\cot c]。\tag{21}$$

但 $\sin a$ 及 $(c-b)$ 是第一級的量；因此，只有若 $\cot c$ 不大，也就是 c 不大的時候（c 小時三角形就不是窄的了）可以忽略乘積 $(c-b)\sin a\cot c$，於是在第一次近似：$\sin A=\frac{\sin a}{\sin c}\cdot\sin B$，但因 a 及 A 是小的，故

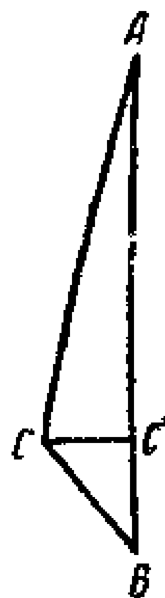


圖 7.

$$A_1=\frac{a\sin B}{\sin c}$$

及

$$A_1\sin c=a\sin B。\tag{22}$$

第一次近似的公式也可以從圖 7 得到。設 CC' 垂直於 AB；將三角形 CBC' 看作是平面的，卽得：$BC'=$ $=a\cos B$，當角 A 甚小時取 $AC'=b$，可求得：$(c-b)_1=$ $=a\cos B$；從另一方面：$CC'=a\sin B=A\sin b$，由此 $A_1=\frac{a\sin B}{\sin b}$，準確到第二級小量也可得：$A_1=\frac{a\sin B}{\sin c}$。

爲了得到對於 $(c-b)$ 的第二次近似的公式，必須用 $\left(\frac{1}{2}A\right)^2$ 或

$\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{\sin B}{\sin c}\right)^2$ 去代替公式(19)中的 $\sin^2\frac{1}{2}A$；於是得：

$$\sin(c-b)=\sin a\cos B-2\sin b\cos c\cdot\frac{1}{4}A^2,$$

而因爲 a 及 $(c-b)$ 都小，第二次近似爲：

$$(c-b)_2=a\cos B-\frac{1}{2}\sin b\cos c\,A_1^2,$$

對於同樣的準確度：

$$(c-b)_2=a\cos B-\frac{1}{2}\sin c\cos c\,A_1^2=$$

$$=(c-b)_1-\frac{1}{4}\sin 2c\,A_1^2=a\cos B-\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\sin^2 B}{\tan c};\quad(23)$$

符號 2 表示準確到第二級微小量。

爲要得到 A 的第二次近似的公式，我們在公式(21)中將 $(c-b)$ 代以它的第一次近似式 $(c-b)_1=a\cos B$；於是

$$\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\sin a}{\sin c}[1+(c-b)_1\cot c],$$

由此，因 a 及 A 是小的，故得：

$$A_2\sin c=a\sin B[1+(c-b)_1\cot c]=$$

$$=A_1\sin c+A_1(c-b)_1\cos c=$$

$$=a\sin B(1+a\cos B\cot c)=$$

$$=A_1\sin c+a^2\sin B\cos B\cot c=$$

$$=A_1\sin c+\frac{1}{2}a^2\sin 2B\cot c。\quad(24)$$

將第二次近似與第一次近似之間究竟相差多少的概念理解清楚是有用的。在天文學中，除了粗略的近似計算的情形以外，邊 a 是不超過 $60''$ 的。在公式(23)中當 $B=90^\circ$ 時右邊第二項的值最大，即

$$(c-b)_2=(c-b)_1-\frac{1}{2}\cdot\frac{3600''}{206265}\cot c=(c-b)_1-0''.00873\cot c;$$

右邊第二項當 $c=41^\circ.1$ 時等於 $0''.01$，當 $c=5^\circ.0$ 時等於 $0''.1$。

若 $a=28''$，那末

$$(c-b)_2=(c-b)_1-\frac{1}{2}\cdot\frac{784''}{206265}\cot c=(c-b)_1-0''.00190\cot c;$$

兩次近似之差當 $c=10^\circ.8$ 時等於 $0''.01$，當 $c=1^\circ.1$ 時等於 $0''.1$。

在公式(24)中當 $B=45^\circ$ 時右邊第二項的值最大，那時 $A_2\sin c=$ $=A_1\sin c+\frac{1}{2}a^2\cot c$，也就是說，量 $A\sin c$ 的第一及第二次近似之差的最大值是和量 $(c-b)$ 的第一及第二次近似之差的最大值相同的。

至於第二次近似公式的準確度，那是高的，譬如，若 $B=90^\circ$，$a=30''$ 且 $c=10'$ 時，$(c-b)_2$ 中的誤差小於 $0''.001$，$A_2\sin c$ 中的誤差只是 $0''.025$。

這些定理和公式在本書中將被反覆地應用。

內插法

§14. 內插法　在天文學的計算中，一方面有由觀測得來的量，例如天頂距，另一方面有天文年曆中所給出的天體的坐標。每一個天體坐標都是在一定的時刻定出來的，而每兩個時刻所經時間間隔是要相等的；例如，對於每一個格林尼治夜半給出太陽的赤經和赤緯，月球坐標或者是對於每一個夜半或正午給出，或者是對於每一個偶小時給出，行星的坐標每天或每兩天或每五天就給出一次，每隔 10 天就給出恆星上中天時的坐標。對於給定的時刻應該從這些數據計算出變量的值。這種數值的計算就稱爲內插法。

不難理解，若任意的量與時間成正比例地變化，那末經過相等的時間之後它的數值之差是不變的。於是所謂線性的內插法是十分簡單的。假若在 24 小時中一個量均勻地變化了 Δ，那末從子夜起 n 小時之後它的值等於它在子夜時的值(在年曆中給出)$+\frac{n}{24}\Delta$。

然而天體的坐標並不是這樣的：表中相隣的數目的差，其變化的複雜性有大有小，只有在很少的情形下內插法才像上述的那樣簡單。但應當記住，問題在於我們所要知道的未知量應當準確到怎麽樣。假若不需要大的準確度，那末線性的內插法常常就可以了；但是我們必須認識較準確的內插法，用這種內插法所得的未知量可以準確到，譬如說，$0''.1$ 或 $0''.01$，正如年曆中所給出的那樣。

內插法的基礎是假設天體的坐標在某個時間範圍內，或者，一般說來，函數 $f(x)$ 在獨立變數 x 的某個小的變化範圍內，可用下面的多項式足夠準確地表出，準確的程度與表中所給出的數值的準確度相同：

$$f(x)=f(x_0)+a(x-x_0)+b(x-x_0)^2+ \\ +c(x-x_0)^3+d(x-x_0)^4。 \qquad (25)$$

我們只取到 $(x-x_0)$ 的四次項，因爲實際上很少需要應用更多的項。

顯然，若這樣的假設是適當的而且可以定出係數 a, b, c, d，那末，根據變數值爲 x_0 時的函數值（或者根據時間爲 t_0 時的坐標值），就可以算出其變數值爲 x 時的函數值了（或者算出在時間爲 t 時的坐標）。這樣的假設對於天文曆書中的所有表格，且幾乎所有的數學表格，都是令人滿意的。問題就在於怎樣把係數 a, b, c, d 算出來。

照常例地，假設，每經過變數 x 的相同間隔 w，表中就列出一個 $f(x)$ 的值。這麼一來，令 $x-x_0=nw$，n 爲某一個數，公式(25)就成爲：

$$f(x_0+nw)=f(x_0)+awn+bw^2n^2+cw^3n^3+dw^4n^4 \qquad (26)$$

或

$$f(x_0+nw)=A_0+An+Bn^2+Cn^3+Dn^4 。 \qquad (27)$$

這裏代替 x 的是新的獨立變數 n。我們必須根據已給的數值表來定出係數 A, B, C, D。

我們可以從數值表寫出 $f(x)$ 的一系列的值，如下面的表 1（第二行）所示；第一行中給出了 x 的值，這就是所謂的表的宗數。

表　1

1	2	3	4	5	6	7
x_0-3w	$f(x_0-3w)$					
		$\Delta^{I}_{-5/2}$				
x_0-2w	$f(x_0-2w)$		Δ^{II}_{-2}			
		$\Delta^{I}_{-3/2}$		$\Delta^{III}_{-3/2}$		
x_0-w	$f(x_0-w)$		Δ^{II}_{-1}		Δ^{IV}_{-1}	
		$\Delta^{I}_{-1/2}$		$\Delta^{III}_{-1/2}$		$\Delta^{V}_{-1/2}$
x_0	$f(x_0)$		Δ^{II}_{0}		Δ^{IV}_{0}	
		$\Delta^{I}_{1/2}$		$\Delta^{III}_{1/2}$		$\Delta^{V}_{1/2}$
x_0+w	$f(x_0+w)$		Δ^{II}_{1}		Δ^{IV}_{1}	
		$\Delta^{I}_{3/2}$		$\Delta^{III}_{3/2}$		
x_0+2w	$f(x_0+2w)$		Δ^{II}_{2}			
		$\Delta^{I}_{5/2}$				
x_0+3w	$f(x_0+3w)$					

作每一個$f(x)$的值與前一個之差，例如$f(x_0)-f(x_0-w)$，並以Δ^{I}表示差數，Δ^{I}的右下方的符號指明了這差數是取於那兩個宗數的函數之間；$\Delta^{I}_{-1/2}$表示$f(x_0)-f(x_0-w)$；$\Delta^{I}_{1/2}$表示差數$f(x_0+w)-f(x_0)$，等等，如表中所示(第三行)。這些差數稱為第一級差或第一差。這樣，我們就可以由它們而算出第二級的差數，並以Δ^{II}表之，Δ^{II}的右下方的符號表示差數位於函數$f(x)$的表中的那一列，這些差數就是所謂的第二級差或第二差，故$\Delta^{II}_0=\Delta^{I}_{1/2}-\Delta^{I}_{-1/2}$；$\Delta^{II}_1=\Delta^{I}_{3/2}-\Delta^{I}_{1/2}$等等。同樣地我們可以算出第三差$\Delta^{III}$，它們當然是位於函數$f(x)$的各列之間，所以右下方帶着符號$\frac{1}{2}$，第四差$\Delta^{IV}$則位於函數的各列中。

假若用多項式(27)表示$f(x)$是夠準確的而這一假設又是正確的話，那末我們就把由表中算出的$f(x)$的數值和對應的多項式(27)的值看做一樣的；它們被擱在表2(35頁)中的第二行。

作已得式子的第一次，第二次，第三次及第四次差，正如同先前得出Δ那樣，也就是說由上往下地把每一式由緊跟着的下一式中減去。這樣就得到表2中的各值(第3，第4等行)。將這些未知數A，B，C，D的函數的差式與根據開始的表1中的數據而計算出的它們的數值Δ相比較，就可以得到用以確定A，B，C，D的一些方程式。

我們看出，表 2 中的第四次差是常數（24 D）；假若在數值的表 1 中第四次甚至第三次差都是常數（或者彼此只在最後一位數差一個單位），那末這就說明了，用多項式表示我們的函數，實際上與表中所給的函數的值一樣地準確。假若第四次差不是常數，那末這說明了，還應該在多項式(25)中加上一些項：$e(x-x_0)^5$，$k(x-x_0)^6$ 等，且也要定出相應的係數 E，K。我們將只推算係數 A，B，C，D，但在最後的公式中也將給出第五次差的係數的值。

表　2

n	$f(x)$	Δ^{I}	Δ^{II}	Δ^{III}	Δ^{IV}
-3	$A_0-3A+9B-27C+81D$				
		$A-5B+19C-65D$			
-2	$A_0-2A+4B-8C+16D$		$2B-12C+50D$		
		$A-3B+7C-15D$		$6C-36D$	
-1	$A_0-A+B-C+D$		$2B-6C+14D$		$24D$
		$A-B+C-D$		$6C-12D$	
0	A_0		$2B+2D$		$24D$
		$A+B+C+D$		$6C+12D$	
$+1$	$A_0+A+B+C+D$		$2B+6C+14D$		$24D$
		$A+3B+7C+15D$		$6C+36D$	
$+2$	$A_0+2A+4B+8C+16D$		$2B+12C+50D$		
		$A+5B+19C+65D$			
$+3$	$A_0+3A+9B+27C+81D$				

所得到的內插公式是甚麼形式，就看我們選用那些差數 Δ，和與之對應的方程式。

我們取，比方說，位於零的一列和它的兩邊的差數。為了書寫的簡單起見，引入這樣的符號：以 Δ_0^{I} 表示 $\frac{1}{2}(\Delta_{-1/2}^{I}+\Delta_{1/2}^{I})$（注意，表中並無 Δ_0^{I}，它只代表已算出的 $\Delta_{-1/2}^{I}$ 及 $\Delta_{1/2}^{I}$ 的和的一半）；同樣地以 Δ_0^{III} 表示 $\frac{1}{2}(\Delta_{-1/2}^{III}+\Delta_{1/2}^{III})$。

這樣就得到

$$\Delta_{-1/2}^{I}=A-B+C-D,\qquad \Delta_{-1/2}^{III}=6C-12D,$$

$$\Delta_0^{II}=2B+2D,\qquad \Delta_0^{IV}=24D,$$

$$\Delta_{1/2}^{I}=A+B+C+D,\qquad \Delta_{1/2}^{III}=6C+12D。$$

我們將取第一及第三對差的半和並引入上述的符號。得:

$$\Delta_0^{\rm I}=A+C;\quad \Delta_0^{\rm II}=2B+2D;\quad \Delta_0^{\rm III}=6C;\quad \Delta_0^{\rm IV}=24D\,。$$

由此定出 D, C, B, A。得:

$$D=\frac{1}{24}\Delta_0^{\rm IV};\quad C=\frac{1}{6}\Delta_0^{\rm III};\quad B=\frac{1}{2}\Delta_0^{\rm II}-\frac{1}{24}\Delta_0^{\rm IV};$$

$$A=\Delta_0^{\rm I}-\frac{1}{6}\Delta_0^{\rm III}\,。$$

將 A, B, C, D 的式子代入多項式(27)中,即得:

$$f(x)=f(x_0+nw)=f(x_0)+\left(\Delta_0^{\rm I}-\frac{1}{6}\Delta_0^{\rm III}\right)n+\left(\frac{1}{2}\Delta_0^{\rm II}-\frac{1}{24}\Delta_0^{\rm IV}\right)n^2+$$

$$+\frac{1}{6}\Delta_0^{\rm III}n^3+\frac{1}{24}\Delta_0^{\rm IV}n^4$$

或者,根據差 Δ 排列多項式:

$$f(x)=f(x_0+nw)=f(x_0)+n\Delta_0^{\rm I}+\frac{1}{2}n^2\Delta_0^{\rm II}+$$

$$+\frac{1}{6}(n^3-n)\Delta_0^{\rm III}+\frac{1}{24}(n^4-n^2)\Delta_0^{\rm IV}$$

或者寫成通用的形式:

$$f(x_0+nw)=f(x_0)+n\Delta_0^{\rm I}+\frac{n^2}{2}\Delta_0^{\rm II}+\frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot2\cdot3}\Delta_0^{\rm III}+$$

$$+\frac{(n+1)n^2(n-1)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\Delta_0^{\rm IV}+\frac{n(n^2-1)(n^2-4)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\Delta_0^{\rm V}\,。\qquad(28)$$

這裏的 $f(x_0+nw)$ 是函數對於宗數 (x_0+nw) 的未知值。

這就是斯特林(Stirling)公式。將補充的說明放在本節之末以及§16,現在我們還要推出其他常用的公式。

取 4 個排在第 0 列和第 1 列以及它們中間的方程式。

$$\Delta_0^{\rm II}=2B+2D,\qquad\qquad \Delta_0^{\rm IV}=24D,$$

$$\Delta_{1/2}^{\rm I}=A+B+C+D,\qquad\qquad \Delta_{1/2}^{\rm III}=6C+12D,$$

$$\Delta_1^{\rm II}=2B+6C+14D,\qquad\qquad \Delta_1^{\rm IV}=24D\,。$$

引入符號:

$$\frac{1}{2}(\Delta_0^{\mathrm{II}}+\Delta_1^{\mathrm{II}})=\Delta_{1/2}^{\mathrm{II}}\quad 及\quad \frac{1}{2}(\Delta_0^{\mathrm{IV}}+\Delta_1^{\mathrm{IV}})=\Delta_{1/2}^{\mathrm{IV}}\text{。}$$

於是：

$$\Delta_{1/2}^{\mathrm{I}}=A+B+C+D;\quad \Delta_{1/2}^{\mathrm{II}}=2B+3C+8D;\quad \Delta_{1/2}^{\mathrm{III}}=6C+12D;$$
$$\Delta_{1/2}^{\mathrm{IV}}=24D\text{。}$$

由這些方程式中算出 A, B, C, D, 得：

$$D=\frac{1}{24}\Delta_{1/2}^{\mathrm{IV}};\quad C=\frac{1}{6}\left(\Delta_{1/2}^{\mathrm{III}}-\frac{1}{2}\Delta_{1/2}^{\mathrm{IV}}\right);$$

$$B=\frac{1}{2}\left(\Delta_{1/2}^{\mathrm{II}}-\frac{1}{2}\Delta_{1/2}^{\mathrm{III}}-\frac{1}{12}\Delta_{1/2}^{\mathrm{IV}}\right);$$

$$A=\Delta_{1/2}^{\mathrm{I}}-\frac{1}{2}\Delta_{1/2}^{\mathrm{II}}+\frac{1}{12}\Delta_{1/2}^{\mathrm{III}}+\frac{1}{12}\Delta_{1/2}^{\mathrm{IV}};$$

將它們代入基本公式並按 Δ 的級而排列；我們把計算省略了，因爲它們十分簡單而且和以前的類似；這樣，我們就得到白塞耳(Bessel)公式：

$$f(x_0+nw)=f(x_0)+n\Delta_{1/2}^{\mathrm{I}}+\frac{n(n-1)}{2}\Delta_{1/2}^{\mathrm{II}}+$$
$$+\frac{n(n-1)\left(n-\frac{1}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3}\Delta_{1/2}^{\mathrm{III}}+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\Delta_{1/2}^{\mathrm{IV}}+$$
$$+\frac{n(n^2-1)(n-2)\left(n-\frac{1}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\Delta_{1/2}^{\mathrm{V}}\text{。}\tag{29}$$

最後，假若取 Δ 的降級數，即：$\Delta_{1/2}^{\mathrm{I}}$, Δ_1^{II}, $\Delta_{3/2}^{\mathrm{III}}$, Δ_2^{IV}, 那末我們將得到方程式：

$$\Delta_{1/2}^{\mathrm{I}}=A+B+C+D;\quad \Delta_1^{\mathrm{II}}=2B+6C+14D;$$
$$\Delta_{3/2}^{\mathrm{III}}=6C+36D;\quad \Delta_2^{\mathrm{IV}}=24D\text{。}$$

由它們定出 A, B, C, D 後，得：

$$D=\frac{1}{24}\Delta_2^{\mathrm{IV}};\quad C=\frac{1}{6}\Delta_{3/2}^{\mathrm{III}}-\frac{1}{4}\Delta_2^{\mathrm{IV}};\quad B=\frac{1}{2}\Delta_1^{\mathrm{II}}-\frac{1}{2}\Delta_{3/2}^{\mathrm{III}}+\frac{11}{24}\Delta_2^{\mathrm{IV}};$$

$$A=\Delta^{\mathrm{I}}_{1/2}-\frac{1}{2}\Delta^{\mathrm{II}}_{1}+\frac{1}{3}\Delta^{\mathrm{III}}_{3/2}-\frac{1}{4}\Delta^{\mathrm{IV}}_{2}。$$

將它們代入(27)式並化約以後，即得牛頓公式：

$$f(x_0+nw)=f(x_0)+n\Delta^{\mathrm{I}}_{1/2}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\Delta^{\mathrm{II}}_{1}+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^{\mathrm{III}}_{3/2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\Delta^{\mathrm{IV}}_{2}+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\Delta^{\mathrm{V}}_{5/2}。\qquad (30)$$

運用完全相同的方法或者根據下列容易推求的關係而變換公式(29)：

$$\Delta^{\mathrm{I}}_{1/2}=\Delta^{\mathrm{I}}_{-1/2}+\Delta^{\mathrm{II}}_{0};\quad \Delta^{\mathrm{II}}_{0}=\Delta^{\mathrm{II}}_{-1/2}+\frac{1}{2}\Delta^{\mathrm{III}}_{-1/2};\quad \Delta^{\mathrm{II}}_{1/2}=\Delta^{\mathrm{II}}_{0}+\frac{1}{2}\Delta^{\mathrm{III}}_{1/2};$$

$$\Delta^{\mathrm{III}}_{1/2}=\Delta^{\mathrm{III}}_{-1/2}+\Delta^{\mathrm{IV}}_{0};\quad \Delta^{\mathrm{IV}}_{0}=\Delta^{\mathrm{IV}}_{-1/2}+\frac{1}{2}\Delta^{\mathrm{V}}_{-1/2}$$

可以得到另外一個白塞耳公式：

$$f(x_0+nw)=f(x_0)+n\Delta^{\mathrm{I}}_{-1/2}+\frac{n(n+1)}{2}\Delta^{\mathrm{II}}_{-1/2}+$$

$$+\frac{n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)}{6}\Delta^{\mathrm{III}}_{-1/2}+\frac{n(n^2-1)(n+2)}{24}\Delta^{\mathrm{IV}}_{-1/2}+$$

$$+\frac{n(n^2-1)(n+2)\left(n+\frac{1}{2}\right)}{120}\Delta^{\mathrm{V}}_{-1/2};\qquad (31)$$

它包含了有符號 $-\frac{1}{2}$ 的差，這些差位於 $f(x_0)$ 及 $f(x_0-w)$ 的列之間。

根據類似的方法我們可以得到另外一個牛頓公式：

$$f(x_0+nw)=f(x_0)+n\Delta^{\mathrm{I}}_{-1/2}+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\Delta^{\mathrm{II}}_{-1}+$$

$$+\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^{\mathrm{III}}_{-3/2}+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\Delta^{\mathrm{IV}}_{-2}+$$

$$+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\Delta^{V}_{-5/2}。\qquad(32)$$

此外還有其他一些內插公式(參考習題)。

牛頓公式(30)及(32)中的差,可以看出僅在所給的表的開頭和末了才能應用它們,因爲在表的開頭和末了不可能作出斯特林和白塞耳公式中的那些差。

在所有這些公式中 n 是任意的,正的或負的,整數或分數;在第四次差是常數的情形下,這些公式是準確的。但實際上僅當 $0<n<+1$ 的時候才應用白塞耳公式(29)及牛頓公式(30),當 $0<n<\frac{1}{2}$ 時才應用斯特林公式(28),原因是在這種情形下由第二次差起係數都不超過0.125,而且是隨着差級的增加而減小的。作出了一種特殊的表(參考書末及天文年曆),其中列出公式(28),(29),(30)中的係數數值。

這些表不適用於 $n<0$ 的情形;爲了使它們在兩種情形下都適用,我們將對 $n<0$ 的情形而變換公式(28),(31)和(32),令 $n=-m$,其中 $0<m<1$。

這樣斯特林公式(28)就變成:

$$f(x_0-mw)=f(x_0)-m\Delta^{I}_{0}+\frac{m^2}{2}\Delta^{II}_{0}-\frac{m(m^2-1)}{6}\Delta^{III}_{0}+$$

$$+\frac{m^2(m^2-1)}{24}\Delta^{IV}_{0}-\frac{m(m^2-1)(m^2-4)}{120}\Delta^{V}_{0};\qquad(33)$$

白塞耳公式(31)就變成:

$$f(x_0-mw)=f(x_0)-m\Delta^{I}_{-1/2}+\frac{m(m-1)}{2}\Delta^{II}_{-1/2}-$$

$$-\frac{m(m-1)\left(m-\frac{1}{2}\right)}{6}\Delta^{III}_{-1/2}+\frac{m(m^2-1)(m-2)}{24}\Delta^{IV}_{-1/2}-$$

$$-\frac{m(m^2-1)(m-2)\left(m-\frac{1}{2}\right)}{120}\Delta^{V}_{-1/2};\qquad(34)$$

牛頓公式(32)就變成：

$$f(x_0-mw)=f(x_0)-m\Delta^{\mathrm{I}}_{-1/2}+\frac{m(m-1)}{2}\Delta^{\mathrm{II}}_{-1}-$$

$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{6}\Delta^{\mathrm{III}}_{-3/2}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{24}\Delta^{\mathrm{IV}}_{-2}-$$

$$-\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{120}\Delta^{\mathrm{V}}_{-5/2}。\quad(35)$$

按絕對值而言這些公式中的係數與公式(28)(29),(30)中的係數相同；因此同一個表適用於兩組公式。根據公式(28),(29),(30)的內插法稱爲向下內插法，根據公式(33),(34),(35)的稱爲向上內插法。

我們注意到，對於 $n=\frac{1}{2}$ 的內插法，白塞耳公式比其他的公式更方便，因爲 Δ^{III} 及 Δ^{V} 的係數變爲零了；由(29)得：

$$f\left(x_0+\frac{1}{2}w\right)=\frac{1}{2}[f(x_0)+f(x_0+w)]-\frac{1}{8}\Delta^{\mathrm{II}}_{1/2}+\frac{3}{128}\Delta^{\mathrm{IV}}_{1/2}。$$

對於用到第一差和第二差的內插法，下列幾何表示可能是有用的。在圖 8 中曲線代表函數 $f(x)$；$-1, 0, +1$ 是横坐標 x 的值的間隔相等的點。第一差和第二差都是正的，因爲當 x 增加時 $f(x)$ 和各弦與 x 軸的傾角都在增加，根據弦的內插法就表示根據白塞耳公式只用到第一差的內插法；可以看出，在 $x=0$ 及 $x=1$ 之間所得的 y 值大於 $f(x)$，因此第二差的影響是負的，$\frac{1}{2}n(n-1)<0$。相反地，根據斯特林公式的內插法就是曲線在 0 點的切線底近似線性內插法；可以看出，我們所得的值小於 $f(x)$，因此第二差的影響是正的；$\frac{1}{2}n^2>0$。

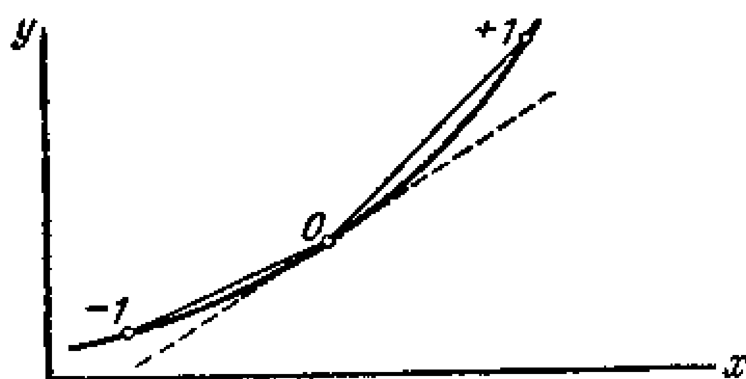


圖 8.

§15. 由函數的差計算其導數．時變 有時需要根據表中所給的

函數數值計算其對於獨立變數（宗數）的導來函數的值，或者計算天文表中的坐標隨時間變化的速度及加速度。根據上述，若多項式(26)或(27)足夠準確地（即準確到表中最後的一位）表示函數（坐標），那末導來函數即可根據下列公式由斯特林，白塞耳，牛頓的內插公式的簡單的微分而得到：

$$\frac{df(x_0+nw)}{d(x_0+nw)}=\frac{1}{w}\cdot\frac{df(x_0+nw)}{dn}。$$

獨立變數（時間）的單位，當然是 w。

用這樣的方法就可以得到下列的公式。

由斯特林公式：

$$\frac{df(x_0+nw)}{d(x_0+nw)}=\frac{1}{w}\Big[\Delta_0^{\mathrm{I}}+n\Delta_0^{\mathrm{II}}+\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{6}\right)\Delta_0^{\mathrm{III}}+$$

$$+\left(\frac{1}{6}n^3-\frac{1}{12}n\right)\Delta_0^{\mathrm{IV}}+\left(\frac{1}{24}n^4-\frac{1}{8}n^2+\frac{1}{30}\right)\Delta_0^{\mathrm{V}}\Big],$$

$$\frac{d^2f(x_0+nw)}{d^2(x_0+nw)}=\frac{1}{w^2}\Big[\Delta_0^{\mathrm{II}}+n\Delta_0^{\mathrm{III}}+\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{12}\right)\Delta_0^{\mathrm{IV}}+\left(\frac{1}{6}n^3-\frac{1}{4}n\right)\Delta_0^{\mathrm{V}}\Big]。$$

由白塞耳公式：

$$\frac{df(x_0+nw)}{d(x_0+nw)}=\frac{1}{w}\Big[\Delta_{1/2}^{\mathrm{I}}+\left(n-\frac{1}{2}\right)\Delta_{1/2}^{\mathrm{II}}+\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+\frac{1}{12}\right)\Delta_{1/2}^{\mathrm{III}}+$$

$$+\left(\frac{1}{6}n^3-\frac{1}{4}n^2-\frac{1}{12}n+\frac{1}{12}\right)\Delta_{1/2}^{\mathrm{IV}}\Big],$$

$$\frac{d^2f(x_0+nw)}{d^2(x_0+nw)}=\frac{1}{w^2}\Big[\Delta_{1/2}^{\mathrm{II}}+\left(n-\frac{1}{2}\right)\Delta_{1/2}^{\mathrm{III}}+\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n-\frac{1}{12}\right)\Delta_{1/2}^{\mathrm{IV}}\Big]。$$

由牛頓公式：

$$\frac{df(x_0+nw)}{d(x_0+nw)}=\frac{1}{w}\Big[\Delta_{1/2}^{\mathrm{I}}+\left(n-\frac{1}{2}\right)\Delta_1^{\mathrm{II}}+\left(\frac{1}{2}n^2-n+\frac{1}{3}\right)\Delta_{3/2}^{\mathrm{III}}+$$

$$+\left(\frac{1}{6}n^3-\frac{3}{4}n^2+\frac{11}{12}n-\frac{1}{4}\right)\Delta_2^{\mathrm{IV}}\Big],$$

$$\frac{d^2 f(x_0+nw)}{d^2(x_0+nw)}=\frac{1}{w^2}\Big[\Delta_1^{\rm II}+(n-1)\,\Delta_{3/2}^{\rm III}+\Big(\frac{1}{2}n^2-\frac{3}{2}n+\frac{11}{12}\Big)\Delta_2^{\rm IV}\Big]。$$

由它們可得對於 n 的個別的值的公式，例如對於 $n=0$，$n=\frac{1}{2}$ 等等。對於 $n=0$，也就是說對於那些宗數的值，在這些數值下，函數 $f(x)$ 的數值是已知的；這樣我們得到：

$$\left|\frac{df(x_0+nw)}{d(x_0+nw)}\right|_{n=0}=\frac{1}{w}\Big[\Delta_0^{\rm I}-\frac{1}{6}\Delta_0^{\rm III}+\frac{1}{30}\Delta_0^{\rm V}\Big]=$$

$$=\frac{1}{w}\Big[\Delta_{1/2}^{\rm I}-\frac{1}{2}\Delta_{1/2}^{\rm II}+\frac{1}{12}\Delta_{1/2}^{\rm III}+\frac{1}{12}\Delta_{1/2}^{\rm IV}\Big]=$$

$$=\frac{1}{w}\Big[\Delta_{1/2}^{\rm I}-\frac{1}{2}\Delta_1^{\rm II}+\frac{1}{3}\Delta_{3/2}^{\rm III}-\frac{1}{4}\Delta_2^{\rm IV}\Big],$$

$$\left|\frac{d^2f(x_0+nw)}{d^2(x_0+nw)}\right|_{n=0}=\frac{1}{w^2}\Big[\Delta_0^{\rm II}-\frac{1}{12}\Delta_0^{\rm IV}\Big]=$$

$$=\frac{1}{w^2}\Big[\Delta_{1/2}^{\rm II}-\frac{1}{2}\Delta_{1/2}^{\rm III}-\frac{1}{12}\Delta_{1/2}^{\rm IV}\Big]=\frac{1}{w^2}\Big[\Delta_1^{\rm II}-\Delta_{3/2}^{\rm III}+\frac{11}{12}\Delta_2^{\rm IV}\Big]。$$

有時在天文年曆中給出了坐標的小時變化 f'，卽以小時爲時間單位的導來函數。假若表的間隔等於 24 小時，那末它們可由下面的公式算出：

$$f'_0=\left|\frac{df(x_0+nw)}{d(x_0+nw)}\right|_{n=0}=\frac{1}{24}\Big(\Delta_0^{\rm I}-\frac{1}{6}\Delta_0^{\rm III}+\frac{1}{30}\Delta_0^{\rm V}\Big)。$$

它們以下面的方式應用於內插法。設 f'_{-1}，f'_0，f'_{+1} 表示對於表中三個相隣的宗數的小時變化。可以取小時變化的導數 f''_0 等於 $\frac{1}{48}(f'_{+1}-f'_{-1})$，於是根據泰勒(Taylor)公式以小時表示$(t-t_0)$得：

$$f(x_0+nw)=f(x_0)+(t-t_0)\,f'_0+\frac{1}{2}(t-t_0)^2f''_0=$$

$$=f(x_0)+(t-t_0)f'_0+\frac{(t-t_0)^2}{2}\cdot\frac{f'_{+1}-f'_{-1}}{48}=$$

$$=f(x_0)+(t-t_0)\left[f'_0+(t-t_0)\frac{f'_{-1}-f'_{-1}}{96}\right]。$$

這裏$(t-t_0)$爲由表中的宗數 t_0 到給定的時刻 t 的以小時表示的時間間隔，所要計算的坐標就是對於時刻 t 的。

假若需要求出函數的極大或極小，那末由表 1 就可以容易地看出，它位於宗數的哪些值之間和靠近宗數的哪個值；於是將這個值當作 x_0 並使第一次導數等於零；我們將得到一個方程式，用逐次近似法卽可由它求出 n；最方便的是應用斯特林公式：

$$\Delta_0^{\mathrm{I}}+n\Delta_0^{\mathrm{II}}+\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{6}\right)\Delta_0^{\mathrm{III}}+\left(\frac{1}{6}n^3-\frac{1}{12}n\right)\Delta_0^{\mathrm{IV}}=0\ 。$$

首先我們得到近似值 $n_1=-\dfrac{\Delta_0^{\mathrm{I}}}{\Delta_0^{\mathrm{II}}}$；由 n_1 算出左邊 3 及 4 項的值後，將求得更準確的值 n_2，這樣繼續下去，直到所得的 n_k 等於前一個值 n_{k-1} 爲止。

§16. 實用指導 從公式的推導可以看出，爲了確定量 $f(x_0)$，A，B，C，D 的數值必須有五個相隣的 $f(x)$ 的值。無論它們的數值如何，卽使它們是完全任意的，未知量 $f(x_0)$，A，B，C，D 都可以單值地求得，且公式(27)代表一條通過這 5 個點的 4 次拋物線。假若這些數目不是任意的，而是某個函數的值，但宗數的間隔大，例如對於 x 等於 $-\pi$，$-\frac{1}{2}\pi$，0，$+\frac{1}{2}\pi$，$+\pi$ 時的 $\sin x$，則 A，B，C，D 又可以單值地定出來，但僅僅對於這五個 x 的值公式(27)才是代表 $\sin x$ 的。爲了能夠應用內插法，對於函數的給定值的宗數的間隔就必須是足夠小，這要視函數變化的急速和平滑而定，從外表看，這是可以根據下面的事實來判明的，這個事實就是：第二或第三，或第四次差是常數(或者，由於函數的給定值的最後一位被取消，這些差幾乎是固定的)。例如，在下面的函數中這就可以明顯地看出來：

$$f(x)=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3 \text{ 及 } \varphi(x)=\sqrt{x}。$$

$f(x)$ 的第三次差是常數，$f(x)$ 可用內插法算出至第 4 位小數。函數 $\varphi(x)$ 對於 $1<x<7$ 甚至有第五次差不是常數，因而甚至用第五次差的內插也不能給出準確的第四位小數(參考 45 頁的表)。

在天文年曆及天文表中所給出的各種坐標及其他的量是對於這樣的時間間隔(一般地說，宗數)而言，使得用到第一和第二差的內插法就常是足夠了，只有對於月球才需要用到更高級的差，才使由內插得到的量和原來表裏的數字一樣地準確。帶高級差的公式應用於造表和計算行星和彗星的擾動。

顯然，內插法不能應用於，在相隣的表值之間有很小的波動的函數；4 次或更高次的拋物線是沒有這些波動的。根據假定，拋物線將夠準確地表示出表中的函數。甚至，如果函數包含着周期在表的 2—3—4 間隔中的周期項，也不能準確地將它內插，因爲內插這種短周期項是不可能準確的。

例：在天文年曆中給出了下面的對於每一格林尼治子夜 0^h 的太陽赤緯的值：

	δ	Δ^{I}	Δ^{II}
1943 年 6 月 11 日	$+23°\ 0'\ 22''.8$		
		+266.4	
6 月 12 日	4 49 .2		−24.5
		241.9	
6 月 13 日	8 51 .1		
			−24.5
		217.4	
6 月 14 日	12 28 .5		
			−24.5
		192.9	
6 月 15 日	15 41 .4		

(1)我們將求出 6 月 13 日午夜以後 $11^h\,40^m$ 的 δ。由 6 月 13 日的 0^h 開始，我們有 $n=11^h\,40^m/24^h$，即 $n=0.4861$，於是 $\frac{1}{2}n(n-1)=-0.1249$；$\frac{1}{2}n^2=+0.1181$。

x	$f(x)$	Δ^{I}	Δ^{II}	Δ^{III}
1	1.6667			
		+3.6666		
2	5.3333		+3.0001	
		6.6667		+0.9999
3	12.0000		4.0000	
		10.6667		0.9999
4	22.6667		4.9999	
		15.6666		1.0002
5	38.3333		6.0001	
		21.6667		0.9999
6	60.0000		7.0000	
		28.6667		
7	88.6667			

x	$\varphi(x)$	Δ^{I}	Δ^{II}	Δ^{III}	Δ^{IV}
1	1.0000				
		+0.4142			
2	1.4142		−0.0963		
		0.3179		+0.0463	
3	1.7321		0.0500		−0.0281
		0.2679		0.0182	
4	2.0000		0.0318		0.0001
		0.2361		0.0091	
5	2.2361		0.0227		0.0035
		0.2134		0.0056	
6	2.4495		0.0171		
		0.1963			
7	2.6458				

根據白塞耳公式：

$$\delta=+23^\circ 8'51''.1+0.4861(+217''.4)-0.1249(-24''.5)=$$
$$=+23^\circ 8'51''.1+1'45''.68+3''.06=+23^\circ 10'39''.84\text{。}$$

根據斯特林公式：

$$\delta=+23^\circ 8'51''.1+0.4861(+229''.65)+0.1181(-24''.5)=$$
$$=+23^\circ 8'51''.1+1'51''.63-2''.89=+23^\circ 10'39''.84\text{。}$$

（2）我們將求出6月12日22^h0^m的δ，卽6月13日子夜前2^h0^m的δ，再由同一個子夜開始；$n=(2^h0^m/24^h)=0.0833$；$\frac{1}{2}n(n-1)=-0.0382$；$\frac{1}{2}n^2=+0.0035$。

根據白塞耳公式：

$$\delta=23^\circ 8'51''.1+0.0833(-241''.9)-0.0382(-24''.5)=$$
$$=23^\circ 8'51''.1-20''.15+0''.94=23^\circ 8'31''.89\text{。}$$

根據斯特林公式：

$$\delta=23^\circ 8'51''.1+0.0833(-229''.65)+0.0035(-24''.5)=$$
$$=23^\circ 8'51''.1-19''.13-0''.09=+23^\circ 8'31''.88\text{。}$$

在天文年曆中給出了下列對於某些時刻的月球赤緯，在這些時刻之間，每相隣兩個之間相隔 12 小時。

	δ	Δ^{I}	Δ^{II}	Δ^{III}	Δ^{IV}	Δ^{V}
1943 年 1 月 6 日　0^h	$-19°23'13''.7$					
		$+467''.4$				
1 月 6 日　12^h	19 15 26 .3		$+1279''.2$			
		1746.6		$-52''.6$		(+6.4)
1 月 7 日　0^h	18 46 19 .7		1226.6		$-40''.7$	
		2973.2		93.3		$+8''.6$
1 月 7 日　12^h	17 56 46 .5		1133.3		32.1	
		4106.5		125.4		+10 .8
1 月 8 日　0^h	16 48 20 .0		1007.9		− 21.3	
		5114.4		− 146.7		
1 月 8 日　12^h	15 23 5 .6		+861.2			
		+ 5975.6				
1 月 9 日　0^h	−13 43 30 .0					

我們將求出 1 月 7 日子夜後 4^h0^m 的 δ；由 1 月 7 日的 0^h 開始：

$$n=4^h/12^h=\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}n(n-1)=-\frac{1}{9};\ \frac{1}{6}n(n-1)\left(n-\frac{1}{2}\right)=+0.0062;$$

$$\frac{1}{24}n(n^2-1)(n-2)=0.0206;\ \frac{1}{120}n(n^2-1)(n-2)\left(n-\frac{1}{2}\right)=-0.0007;$$

$$\frac{1}{2}n^2=\frac{1}{18};\ \frac{1}{6}n(n^2-1)=-0.0494;\ \frac{1}{24}n^2(n^2-1)=-0.0041;$$

$$\frac{1}{120}n(n^2-1)(n^2-4)=+0.0096\text{。}$$

根據白塞耳公式：

$$\delta=-18°46'19''.7+\frac{1}{3}(+2973''.2)-\frac{1}{9}(+1180.0)+0.0062(-93''.3)+$$
$$+0.0206(-56''.4)-0.0007(+8''.6)=$$
$$=-18°46'19''.7+16'31''.07-2'11''.1-0''.58-0''.75-0''.01=-18°32'1''.08\text{。}$$

根據斯特林公式：

$$\delta=-18°46'19''.7+\frac{1}{3}(+2359''.9)+\frac{1}{18}(+1226''.6)-0.0494(-73''.0)-$$
$$-0.0041(-40''.7)+0.0096(+7''.5)=$$
$$=-18°46'19''.7+13'6''.63+1'8''.14+3''.61+0''.17+0''.07=-18°32'1''.08\text{。}$$

§17. 造表和尋找表中錯誤時內插法的應用　要在各宗數值具有相等的間隔時，算出在這些宗數下的任何函數值的表，若函數相當複雜，而對於每一個應當在最後的表中的宗數都算出一個函數值表，從節省時間的意義上來說，這是不必要甚至是無益的，反之，應該只對奇號的宗數或者甚至只對每第四個數(1，5，9 等等）而算出函數的值，但

要多算出一位小數，然後根據白塞耳公式用 $n=\frac{1}{2}$ 的內插法得到中間的函數值：

$$f\left(x+\frac{1}{2}w\right)=\frac{1}{2}[f(x)+f(x+w)]-\frac{1}{8}\Delta^{II}_{1/2}+\frac{3}{128}\Delta^{IV}_{1/2};$$

若對每第四個宗數的值而計算它時，就需要應用 $n=\frac{1}{2}$ 的內插法兩次。在最後的結果中可根據一般的規則(參考 §12 之末)將數字進位到所需的小數位。

但是，如果希望有完全的準確度，那末在捨去的數是 5 的情形下，應當用更多的小數位重複計算，以便決定這個 5 是由什麼數得到的；它的後面是零的情形是很少的。

若有某函數的已做好的表時，那末其中可能的錯誤是可以發現的，只要做出第一和第二差並仔細看看它們是否規則地變化沒有跳躍。下表指出，當只在函數的一個初值中有錯誤 $\pm y$ 時，對於第一和第二差的數值有什麼影響。

					Δ^{I}	Δ^{II}
$f(x_0)$		Δ^{II}_0				
	$\Delta^{I}_{1/2}$		log 19	1.2788		
					+222	
$f(x_0+w)$		$\Delta^{II}_1\pm y$	20	3010		−10
					212	
	$\Delta^{I}_{3/2}\pm y$		21	3222		8
					204	
$f(x_0+2w)\pm y$		$\Delta^{II}_2\mp 2y$	22	3426		13
					191	
	$\Delta^{I}_{5/2}\mp y$		23	3617		6
					185	
$f(x_0+3w)$		$\Delta^{II}_3\pm y$	24	3802		8
					177	
	$\Delta^{I}_{7/2}$		25	3979		
$f(x_0+4w)$		Δ^{II}_4				

我們看見了，第一尤其是第二差的均勻變化被突然地破壞了。請

將數值表中第二差的變化比較一下。試找出錯誤來。

但是如果這種錯誤很多,那末每一個錯誤對於第二差的影響是和別的錯誤的影響相加在一起的,而且非常難於分辨;甚至可能使正確的數變為不正確的。在這種情形下最好繪出第一差的圖來。如果沿 x 軸標出宗數的數字,沿 y 軸標出第一差。那末在標畫各點的過程中已經可以很可靠地發現,應該改正函數的什麼值才能使第一差的變化均勻;但只有在第一差變化得慢且圖形不複雜的時候,這才是方便的。上述是關於函數值的最後一位的 1—2 個單位的錯誤的確定;大錯誤當然可以無誤地用這種方法來確定,只要它們出現的次數不多。

第三章　地球和它的繞日運動

關於地球和它的繞日運動的一些資料收集在本章中，這些資料對於本書其他各章(時間，視差，光行差)是必需的。

§18. 地球的形狀和大小　正如分度測量所指出的，地球表面差不多是一個扁的旋轉橢圓體，其旋轉軸與地球自轉軸相重合。在這裏所指的地球表面，當然不是指有凹地和高山的眞正地表面，而是假定陸地上佈滿了充滿海水的水溝，這海水的表面就是我們所指的地球表面。在沒有風暴和潮汐所引起的波浪時，平靜的海洋裏的水也有同樣的表面。

準確地說，這個表面的形狀是不規則的，它被下述的性質所確定：地面上每點的重力方向與地面在此點的法線方向重合。

重力是地球對物質點(實際上是重物)的吸力和離心力的合力，離心力是由於地球自轉所產生的。

適合上述性質的曲面有無限多，其中與平靜海面重合的曲面稱爲大地水準面，而被它所包圍的物體稱爲大地水準體。然而大地水準體與旋轉橢圓體的差別不大，垂直方向的差不超過 $150m$，因此在所有的天文學的問題中，把地球當爲旋轉橢圓體是有足夠理由的。

根據在地面各處多次進行分度測量的結果，不止一次地確定了地球橢圓體的元素，即長軸 $2a$ (赤道直徑)和短軸 $2b$ (旋轉軸)；由此得到橢率 $\alpha=\dfrac{a-b}{a}$。

下面給出在十九世紀被採用的白塞耳 (Bessel) 要素，1911 年在巴黎國際代表會議上通過了的黑佛得 (Heyford) 要素，以及在中央大地測量航空照相與地圖製圖學研究所中，根據 Ф. Н. 克拉索夫斯基 (Красовский) 教授的研究和在他指導下算出的要素。

	白塞耳的橢圓體	海佛得的	Ф. Н. 克拉索夫斯基的
a	6,377,397 m	6,378,388 m	6,378,245 m
b	6,356,079 m	6,356,909 m	6,356,863 m
α	1:299.15	1:297.0	1:298.3

§19. 確定地球上點的位置的坐標　自轉軸的端點稱爲地球的極，向北天極的那點稱爲北極，向南天極的那點叫南極（參看§24）。若在地球的北極上看，地球依反時針方向自轉。通過地球中心而與短軸垂直的平面，與地面相交成一圓，此圓即地球赤道。任意一個通過短軸的平面與地面相交的橢圓，其半長徑都是 a，半短徑都是 b。此橢圓的由北極到南極的一半稱爲它上面各點的子午線。子午線在地面上的位置，是由通過此子午線的平面與通過某一標準子午線的平面間的交角來確定。現在，此標準子午線採用格林尼治（Greenwich）子午線，即通過格林尼治天文台內某確定點的子午線。此角稱爲經度；由格林尼治朝東，西兩個方向從 $0°$ 計算到 $180°$；若某子午線在地球自轉的情況下，在格林尼治子午線的前面而不超過 12 小時，則此子午線的經度稱爲東經，若在後面則稱爲西經。因此若把子午面延長到恆星之處，則位於格林尼治子午線以東（西）的子午線要比格林尼治子午線早（晚）些經過天體。

子午線上各點的位置，由地理緯度來確定。每點有三種緯度：（1）地心緯度，（2）測地緯度，（3）天文緯度。地心緯度爲該點向徑（即由橢圓體中心至該點的連線）與赤道面的交角。測地緯度爲橢圓體在此點的法線與赤道面的交角。天文緯度是該點鉛垂線與赤道面的交角。向徑用字母 ρ 表示；天文緯度用字母 φ 表示；地心緯度用 φ' 表示；測地緯度自己沒有記號，通常（除特殊研究外）不從天文緯度區別出來。

由觀測只能量出天文緯度；測地緯度是由在地上廣大地區內測量到的許多天文緯度和大地測量結果的比較而得到的，它們之面的差別就是因爲鉛垂線（大地水準面的法線）與旋轉橢圓體的法線不重合。通

常此差不超過 $3''$，在天文問題中可以忽略。

由於鉛垂線與地面法線不重合，產生了鉛垂線與地球自轉軸不相交的情況；因此沒有一個平面，既通過鉛垂線又通過地球自轉軸，而有通過鉛垂線又與地球自轉軸平行的平面。此平面可以稱爲天文子午面以別於前面定義的測地子午面。然而並不這樣採用，因在一般的天文問題中不需要把鉛垂線與橢圓體法線分開。此差稱爲鉛垂線的偏角（這裏指對橢圓體法線的偏角）。

§20. $\varphi-\varphi'$ 和 ρ 用旋轉橢圓體元素表達出來的式子 爲了進一步討論，必須把向徑 ρ 和 $\varphi-\varphi'$ 用旋轉橢圓體的元素 a, b 表出。令圖 9 中所畫的爲壓扁的部份被故意誇大的地球子午線：P 爲北極，P' 爲南極，O 爲中心，OA 爲子午面與赤道面相交的直線，M 爲子午線上的一點，MN（N 爲 OA 上的一點）爲在 M 點的法線。因地球爲旋轉橢圓體，故 MN 也是橢圓體在 M 點的法線。

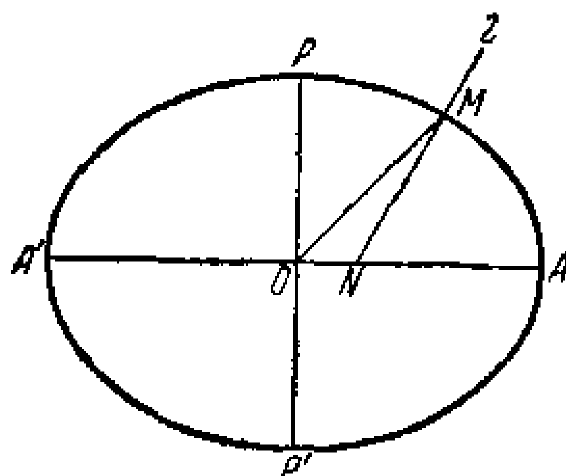


圖 9.

MOA 角爲地心緯度 φ'，MNA 角爲測地緯度，符號與天文緯度相同，記爲 φ。

取 OA 爲 x 軸，OP 爲 y 軸。子午線的橢圓方程爲 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。容易看出 $\tan\varphi'=\frac{y}{x}$；另外由微分幾何定理知，$\tan\varphi=-\frac{dx}{dy}$，而由橢圓方程得 $\frac{2x}{a^2}\frac{dx}{dy}+\frac{2y}{b^2}=0$，故 $\tan\varphi=\frac{y}{b^2}\cdot\frac{a^2}{x}$。

若 e 表示橢圓的偏心率，則，如所週知，$b^2=a^2(1-e^2)$。橢率 α 爲 $\frac{a-b}{a}$；因此 $b=a(1-\alpha)$；故 $1-e^2=(1-\alpha)^2$：

$$e^2=1-(1-\alpha)^2=2\alpha-\alpha^2=2\alpha\left(1-\frac{1}{2}\alpha\right)。$$

引入偏心率有：$\tan\varphi=\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{1-e^2}$。而因 $\tan\varphi'=\frac{y}{x}$，故 $\tan\varphi'=$
$=(1-e^2)\tan\varphi$。

又

$$\tan(\varphi-\varphi')=\frac{\tan\varphi-\tan\varphi'}{1+\tan\varphi\tan\varphi'}=\frac{\tan\varphi-(1-e^2)\tan\varphi}{1+(1-e^2)\tan^2\varphi}=$$

$$=\tan\varphi\frac{e^2}{\sec^2\varphi-e^2\tan^2\varphi}=\sin\varphi\cos\varphi\frac{e^2}{1-e^2\sin^2\varphi}。$$

由於 e^2 很小$\left(差不多是\frac{1}{150}\right)$，可以在展開式中只取兩項，我們就得到

$$\tan(\varphi-\varphi')=e^2\sin\varphi\cos\varphi+e^4\sin^3\varphi\cos\varphi,$$

但因
$$\sin^2\varphi=\frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)$$

故
$$\tan(\varphi-\varphi')=\frac{1}{2}e^2\sin 2\varphi+\frac{1}{2}e^4\sin\varphi\cos\varphi(1-\cos 2\varphi)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{4}e^4\right)\sin 2\varphi-\frac{1}{8}e^4\sin 4\varphi。$$

因 $\frac{1}{2}e^2$ 差不多等於 $\alpha=\frac{1}{300}$，故 $\tan(\varphi-\varphi')$ 的最大值約爲 $\frac{1}{300}$，而 $\varphi-\varphi'$ 約爲 $11'$，所以（由 §6）可以取 $\tan(\varphi-\varphi')=\varphi-\varphi'$，誤差不超過 $0''.01$。因此以弧度爲單位時

$$\varphi-\varphi'=\frac{1}{2}\left(e^2+\frac{1}{2}e^4\right)\sin 2\varphi-\frac{1}{8}e^4\sin 4\varphi,$$

而以角度秒爲單位時

$$(\varphi-\varphi')''=\frac{1}{2}\left(e^2+\frac{1}{2}e^4\right)206265''\sin 2\varphi-\frac{1}{8}e^4\,206265''\sin 4\varphi。$$

若取 $\alpha=\frac{1}{298.3}$，計算 e^2 代入上式，則得

$$(\varphi-\varphi')''=692''.62\sin 2\varphi-1''.16\sin 4\varphi。\qquad(36)$$

在天文實際工作中，上式右端常常只取第一項。

至於向徑，則由橢圓方程有

$$\frac{\rho^2\cos^2\varphi'}{a^2}+\frac{\rho^2\sin^2\varphi'}{b^2}=1。$$

但因 $$\tan\varphi'=(1-e^2)\tan\varphi,$$

則 $$\sin^2\varphi'=\frac{(1-e^2)^2\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi+(1-e^2)^2\sin^2\varphi};$$

$$\cos^2\varphi'=\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi+(1-e^2)^2\sin^2\varphi}。$$

此外，$b^2=a^2(1-e^2)$，因此

$$\frac{\rho^2}{a^2}\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi+(1-e^2)^2\sin^2\varphi}+\frac{\rho^2}{a^2}\cdot\frac{(1-e^2)\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi+(1-e^2)^2\sin^2\varphi}=1。$$

由此得

$$\frac{\rho^2}{a^2}=\frac{\cos^2\varphi+(1-e^2)^2\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi+(1-e^2)\sin^2\varphi}=\frac{1-e^2\sin^2\varphi-(1-e^2)e^2\sin^2\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi}=$$

$$=1-(1-e^2)e^2\sin^2\varphi(1+e^2\sin^2\varphi+e^4\sin^4\varphi+\cdots)=$$

$$=1-(1-e^2)e^2\sin^2\varphi-(1-e^2)e^4\sin^4\varphi-(1-e^2)e^6\sin^6\varphi-\cdots$$

由此得

$$\frac{\rho}{a}=1-\frac{1}{2}(1-e^2)e^2\sin^2\varphi-\frac{1}{2}(1-e^2)e^4\sin^4\varphi-$$

$$-\frac{1}{8}(1-e^2)^2e^4\sin^4\varphi-\cdots=$$

$$=1-\frac{1}{2}(1-e^2)e^2\sin^2\varphi-\frac{5}{8}e^4\sin^4\varphi-\cdots,$$

對於天文問題，止於 e^4 項就足夠了。

在此情形中，應用對數級數

$$\log_{10}(1-x)=M\left(-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\cdots\right),$$

其中 $$M=0.4342945[9.637784]。$$

那末就得到

$$\log_{10}\frac{\rho}{a}=M\Big[-\frac{1}{2}e^2(1-e^2)\sin^2\varphi-\frac{5}{8}e^4\sin^4\varphi-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}e^4(1-e^2)^2\sin^4\varphi-\cdots\Big]=$$

$$=M\Big[-\frac{1}{2}e^2(1-e^2)\sin^2\varphi-\frac{3}{4}e^4\sin^4\varphi-\cdots\Big]。$$

若在所得到的 $\frac{\rho}{a}$ 與 $\log_{10}\frac{\rho}{a}$ 的公式中代入數值 $e^2=0.006693$ 與相當的 $\alpha=\frac{1}{298.3}$，則得:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\rho}{a}&=1-0.003324\sin^2\varphi-0.000028\sin^4\varphi,\\ \log_{10}\frac{\rho}{a}&=-0.001444\sin^2\varphi-0.000015\sin^4\varphi。\end{aligned}\right\}\qquad(37)$$

因爲在 α, e^2 中可容許的誤差，根據最近的研究斷定不超過 0.3%，所以在 $(\varphi-\varphi')$，$1-\frac{\rho}{a}$，$\log_{10}\frac{\rho}{a}$ 中可能的誤差也不超過 0.3%。

§21. 緯度的變化 在十九世紀末，發現地球自轉軸的位置在地球體內變化，因此兩極就在地面上運動。此運動非常複雜：北極不斷地繞着某點按反時針方向旋轉，惟角速度不固定，而與那點的距離有時在增加，有時減小，不過不超過 0″.3 或 9 米。根據最近的研究，旋轉周期平均爲 433 天(1.185 年)。另外，還發現極在距離它的平均位置約 0″.07—0″.08 處作周年運動。由於極的運動，使地上所有的經緯度都發生顫動變化。緯度的顫動達 ±0″.3。目前還不可能預先知道極的位置，爲了研究此現象，在 1899 年成立了國際緯度觀測網：卽不斷地測定某些在同一緯度上(38°9′)的點的緯度。在蘇聯，這種觀測在基塔布 (Китаб 在烏玆别克共和國)進行。

§22. 鉛垂線的周日顫動 鉛垂線對於地面上不動的物體，並不是絕對不變，而因爲月球和太陽的吸引產生了不大的顫動。

爲了研究方便起見，可設地球爲半徑等於 R 的圓球體，且地心引力與離心力的合力指向

地球中心 T(見圖 10)。令 L 爲月球; m 爲月球的質量; M 爲地球質量, Δ 表示距離 TL, Δ' 表示距離 ML(M 爲重物); 用 z 表示 ZTL 角, z' 表示 ZML 角。根據牛頓定律地面重力加速度 $g=f\frac{M}{R^2}$; 月球對地球固體部份的吸引力的加速度等於 $f\frac{m}{\Delta^2}$, 並作用於地心 T, 月球對於重物的吸引的加速度等於 $f\frac{m}{\Delta'^2}$, 作用於重物。

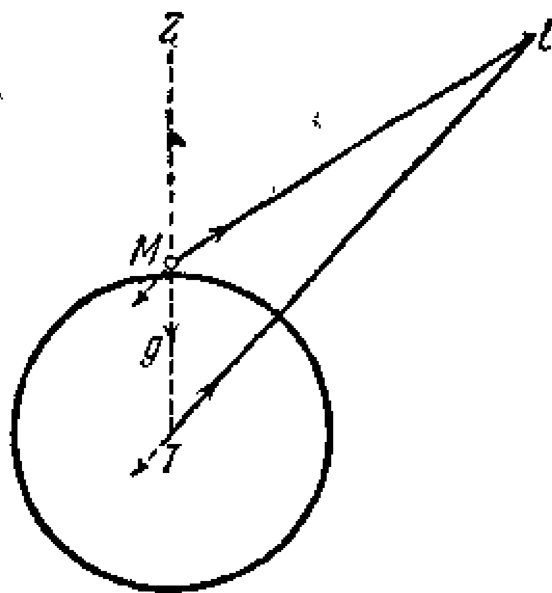


圖 10.

設以同一加速度 $f\frac{m}{\Delta^2}$ 作用於地心及重物, 而方向相反(由 L 到 T)。於是重物對地球的加速度就是由三個加速度合成。它們在地球重力方向的投影爲: g, $+f\frac{m}{\Delta^2}\cos z$, $-f\frac{m}{\Delta'^2}\cos z'$, 其和爲 $X=g+fm\left(\frac{\cos z}{\Delta^2}-\frac{\cos z'}{\Delta'^2}\right)$。把這三個加速度投影於和鉛垂線垂直而向月球那一邊的方向,其和爲

$$Y=f\frac{m}{\Delta'^2}\sin z'-f\frac{m}{\Delta^2}\sin z=fm\left(\frac{\sin z'}{\Delta'^2}-\frac{\sin z}{\Delta^2}\right)。$$

考慮到 $\frac{\sin z'}{\sin z}=\frac{\Delta}{\Delta'}$; $R=\Delta\cos z-\Delta'\cos z'$ 和近似地 $\Delta=\Delta'+R\cos z$, X 和 Y 可轉換如下:

$$X=f\frac{M}{R^2}+fm\left(\frac{\cos z}{\Delta^2}-\frac{\Delta'\cos z'}{\Delta'^3}\right)=f\frac{M}{R^2}+fm\left(\frac{\cos z}{\Delta^2}-\frac{\Delta\cos z-R}{\Delta'^3}\right)=$$

$$=f\frac{M}{R^2}+f\frac{m}{\Delta^2}\left[\cos z-\left(\cos z-\frac{R}{\Delta}\right)\left(\frac{\Delta}{\Delta'}\right)^3\right]=$$

$$=f\frac{M}{R^2}+f\frac{m}{\Delta^2}\left[\cos z-\left(\cos z-\frac{R}{\Delta}\right)\left(\frac{\Delta}{\Delta-R\cos z}\right)^3\right]=$$

$$=f\frac{M}{R^2}+f\frac{m}{\Delta^2}\left[\cos z-\left(\cos z-\frac{R}{\Delta}\right)\left(1-\frac{R}{\Delta}\cos z\right)^{-3}\right]。$$

展開爲級數而止於 $\frac{R}{\Delta}$ 的一次冪,得

$$X=f\frac{M}{R^2}+f\frac{m}{\Delta^2}\left[\frac{R}{\Delta}-3\frac{R}{\Delta}\cos^2 z\right]=f\frac{M}{R^2}\left[1+\frac{m}{M}\left(\frac{R}{\Delta}\right)^3(1-3\cos^2 z)\right],$$

$$Y=\frac{fm\sin z}{\Delta^2}\left[\frac{\Delta^2}{\Delta'^2}\cdot\frac{\sin z'}{\sin z}-1\right]=\frac{fm\sin z}{\Delta^2}\left[\frac{\Delta^2}{(\Delta-R\cos z)^2}\cdot\frac{\Delta}{\Delta'}-1\right]=$$

$$=\frac{fm\sin z}{\Delta^2}\left[\frac{\Delta^3}{(\Delta-R\cos z)^3}-1\right]=\frac{fm\sin z}{\Delta^2}\left[\left(1-\frac{R\cos z}{\Delta}\right)^{-3}-1\right]。$$

只取 $\frac{R}{\Delta}$ 的一次冪,得

$$X=f\frac{M}{R^2},\ Y=3fm\sin z\cos z\frac{R}{\Delta^3}=\frac{3}{2}fm\frac{R}{\Delta^3}\sin 2z。$$

因此由於月球的吸引,使鉛垂線與正常鉛垂線(即無月球時的鉛垂線)的偏角 ε 確定如下:

$$\varepsilon=\tan\varepsilon=\frac{Y}{X}=\frac{3}{2}\frac{m}{M}\left(\frac{R}{\Delta}\right)^3\sin 2z。$$

代入數值: $M=81.5m$ 和 $\Delta=60.27R$, 得 $\varepsilon=0''.0173\sin 2z$。當月球在地平線上而 $\sin 2z>0$ 時,則懸着的重物由於它自己的重量向月球那邊偏那樣一個小角度;當月球在地平線下時,則 $\sin 2z<0$, 重物向與月球相反的方向偏。在月球繞地球作周日旋轉的時間內,鉛垂線繪出了一個錐面,而與正常鉛垂線的偏角在任何時候都不超過 $0''.0173$。懸線端點繪出了很複雜的曲線,其形狀與月球赤緯和當地的緯度有關。

同理可得太陽吸引所產生偏角的數值,若在公式中代入 $m=329\,400M$, $R=\Delta\sin 8''.8$, 則得 $\varepsilon=0''.0079\sin 2z_{\odot}$。

這樣一來,月球與太陽吸引的聯合影響,使鉛垂線方向由正常位置的偏離不超過 $0''.025$。這樣小的角度在天文觀測中可能但很難發現,因此在一般天文問題中把它忽略了;鉛垂線的這個顫動是被所謂水平擺所發現的。

注意,由月球產生的加速度等於

$$Y=\frac{3}{2}\cdot\frac{R}{\Delta^3}fm\sin 2z=g\cdot\frac{3}{2}\left(\frac{R}{\Delta}\right)^3\frac{m}{M}\sin 2z=$$

$$=0.84\times10^{-7}\,g\sin 2z=\frac{g}{12\times10^6}\sin 2z$$

爲由太陽所產生的加速度的兩倍,此加速度作用於海水滴,就是潮汐產生的基本原因。

水平擺的構造好像一個沒有懸掛好的門,旋轉軸不是垂直的:它不能平穩地掛在任何位置,而是趨近於停在通過旋轉軸的垂直平面。水平擺(圖 11)包括一條幅軸 ABE,一端套着兩個線圈 A 和 B,由那邊有細線連到 C 和 D,細線在這兩點是縛在位於基礎穩固的垂支柱上面(在圖上沒有繪出來)。儀器安裝得使旋轉軸 DC 和鉛垂線 CZ 只成一很小的角度;因此幅軸就在垂直平面 DCZ 上,不過當鉛垂線的方向垂直於此平面作微小變動時,幅軸就偏轉了一小角度,此偏轉可以用鏡子的讀數記錄下來(如準確的帶有鏡子的電流計一樣)。鏡子裝在幅軸上面。把反射像照在轉動着的澳紙上,可以連續不斷地記錄,澳紙每星期更換一次。爲了要記錄鉛垂線在垂直方向的偏轉,需要第二個水平擺,CD 軸(幅軸亦同)對 CZ 的傾角和第一個擺成直角。儀器裝在深的地下室裏,使地面上質量的移動不致影響幅軸的位置。

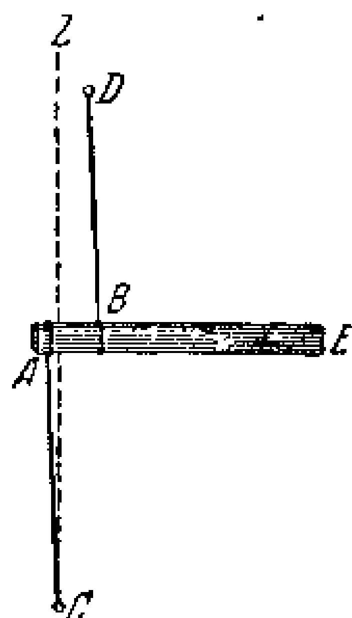


圖 11.

觀測證明:實際上觀測到的鉛垂線傾角,爲理論上的數值的 $\frac{2}{3}$。爲要說明此現象的意義,應當記住儀器只表出相對於地面的鉛垂線的傾斜。如地面完全不變,且地球是絕對的固體,則儀器將表出鉛垂線傾斜的

全部。反之，如果鉛垂線方向改變時，地球整個也跟着變形，那麼它的表面也應該改變到始終和鉛垂線成正交，而儀器就完全不可能發現鉛垂線的傾斜了。不過在這種情形下，海洋中就不會有潮汐。

實際上，這兩種極端的情況都不出現：鉛垂線因月球和太陽的作用而產生的傾斜的確被觀測到，不過還沒有到假定地球爲絕對固體的那種程度。這也證明地球的固體部份是受到變形的影響，但不完全受影響，也就是說，地球是彈性的。理論研究證明，地球的彈性和鋼差不多：地球變形的程度約等於一大小相同的鋼球變形的程度。

§23. 地球重心的運動 由下面的運動合成：

（1）地球重心繞着地月系的質量中心旋轉，軌道和月繞地運動的軌道相似，不過比它小得多，比率爲 $m:(M+m)$，其中 m 和 M 各爲月和地的質量，並且在軌道面上扭轉了 180°；（2）地月系的中心繞太陽依橢圓軌道運動，這軌道只作不多的變化，此變化的原因是行星對地球和太陽的吸引而產生的攝動；由於這些攝動，地月系的質量中心運動對克普勒定律而言有了偏差，經度偏差不到 $\pm 40''$，緯度偏差爲 $\pm 0''.8$，而向徑偏差爲 ± 0.00008；在一般情況下，要比上列數字小；（3）太陽中心繞着太陽系的質量中心依某種軌道旋轉，此軌道主要由下述兩軌道合成：（甲）差不多是圓形的軌道，半徑爲 $\frac{5.20}{1048}=0.00496$ 天文單位 (0.742×10^6 公里)，周期與木星公轉周期相同；（乙）差不多是圓形的軌道，半徑爲 $\frac{9.55}{3490}=0.00274$ 天文單位 (0.410×10^6 公里) 周期與土星公轉周期相同；（4）太陽系質量中心對於銀河系中心以每秒 250—300 公里的速度，與離太陽最近的恆星一起，向天鵝座北部運動。

爲了更一進步，我們必須詳細討論地球繞日的周年運動 在球面天文學的許多問題中，可以認爲地球中心繞太陽中心運動的軌道爲一橢圓，其焦點在太陽中心，並適合克普勒定律：向徑掃過的面積與時間成正比。

令圖 12 爲地球中心運動的橢圓，其橢率故意誇大；O 爲橢圓中心；S 爲太陽中心，也就是橢圓的一個焦點，AII 爲長徑，即所謂拱線；II

爲近日點，A 爲遠日點，T 爲地球中心在軌道上的某位置；TV 爲地球中心的速度。

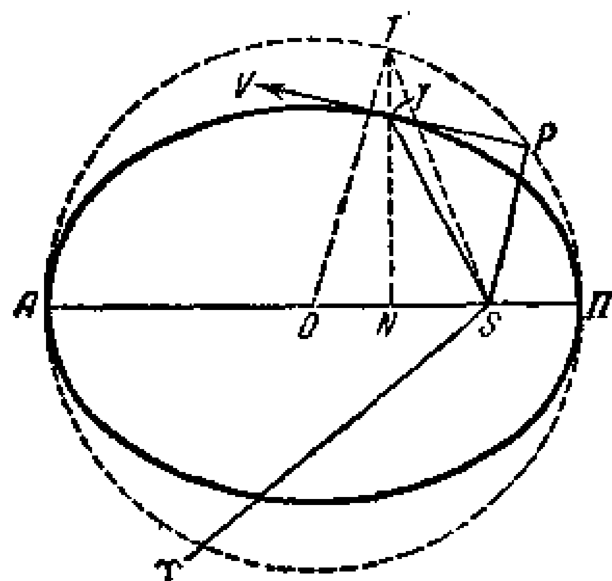


圖 12.

爲了光行差那章，我們必須求出下面兩個量的式子：(1)速度 V，以公里/秒爲單位，(2)向量 $\overline{TS}$ 與 $\overline{TV}$ 間的角度(記爲 $90°+\eta$)，表爲軌道要素(半長徑 a，偏心率 $e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$，其中 b 爲半短徑，公轉周期 P，及確定 T 點位置的 $\overline{S\Pi}$ 與 $\overline{ST}$ 兩向量的交角 v)的函數，角度 v 稱爲眞近點角，由 $S\Pi$ 按行星運動的方向來量。在圖中，運動爲反時針方向，好像在天球北極來看地球運動一樣。

由解析幾何學可知，以焦點爲極的橢圓的極坐標方程式爲

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}。$$

由微分幾何學公式可得角度 $90°-\eta$：$\tan(90°-\eta)=r\dfrac{dv}{dr}$❶。

由橢圓方程式得

$$\frac{dr}{dv}(1+e\cos v)-re\sin v=0,$$

因此 $\dfrac{rdv}{dr}=(1+e\cos v)/e\sin v=\tan(90°-\eta)=\cot\eta$；由此 $\tan\eta=\dfrac{e\sin v}{1+e\cos v}$，且易得：

---

❶ 若有必要可推出如下：在 T 點附近取 T_1 點，向徑爲 $r+\Delta r$，眞近點角爲 $v+\Delta v$；作 ST_1 的垂線 TN；由三角形 TNT_1 限於一級無限小有：$r\Delta v=\Delta r\tan TT_1N$，視 Δv，Δr 爲趨近於零的量，取極限即得課文中的公式；角 TT_1N 在極限時化爲 $90°-\eta$。

$$\left.\begin{aligned}\sin\eta&=\frac{e\sin v}{\sqrt{1+2e\cos v+e^2}}\\ \cos\eta&=\frac{1+e\cos v}{\sqrt{1+2e\cos v+e^2}}\text{。}\end{aligned}\right\}\tag{38}$$

為要推出 V，令 SP 垂直於切線。向徑在單位時間掃過的面積的兩倍等於 $V\cdot SP$。另外，橢圓面積的兩倍為 $2\pi ab$，而周期為 P，故單位時間內向徑掃過的面積的兩倍為 $\frac{2\pi ab}{P}$；因此

$$V\cdot SP=\frac{2\pi ab}{P}=\frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{P}\text{。}$$

但 $SP=ST\sin(90^\circ-\eta)=r\cos\eta=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}\cdot\frac{1+e\cos v}{\sqrt{1+2e\cos v+e^2}}=$

$$=\frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1+2e\cos v+e^2}}\text{.}$$

故

$$\left.\begin{aligned}V&=\frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{P}\cdot\frac{\sqrt{1+2e\cos v+e^2}}{a(1-e^2)}=\\ &=\frac{2\pi a}{P\sqrt{1-e^2}}\sqrt{1+2e\cos v+e^2},\\ V\sin\eta&=\frac{2\pi ae\sin v}{P\sqrt{1-e^2}};\quad V\cos\eta=\frac{2\pi a}{P\sqrt{1-e^2}}(1+e\cos v)\text{。}\end{aligned}\right\}\tag{39}$$

為了得到以公里/秒為單位的 V，必須以現在所採用的 a 值 149.5×10^6 公里代入，P 為恆星年的秒數，即 $365.256\times24\times60\times60=$ $=31558\times10^6$ 秒.

$V_0=\frac{2\pi a}{P\sqrt{1-e^2}}=29.770$ 公里/秒，即所謂地球在軌道上的平均速度，而

$$V=V_0\sqrt{1+2e\cos v+e^2}\text{。}$$

令 $S\Upsilon$ 為春分點方向；則角 $\Upsilon S\Pi$ 為近日點黃經 ω；角 ΥST 為地球眞黃經 $l=\omega+v$；太陽眞黃經 $\odot=l+180^\circ=180^\circ+\omega+v$。因此

$v=180^\circ+\odot-\omega$:

$$\left.\begin{aligned}V\sin\eta&=\frac{2\pi ae}{P\sqrt{1-e^2}}\sin(\omega-\odot);\\ V\cos\eta&=\frac{2\pi a}{P\sqrt{1-e^2}}[1-e\cos(\omega-\odot)]。\end{aligned}\right\}\tag{40}$$

現在(1947 年) $\omega=102^\circ$, 而每年增加 $62''$ (因歲差增加 $50''$, 因拱線的旋轉增加 $12''$)。

爲了時間那一章,需要一個用地球通過近日點以後的時刻 t 來表示 v 的公式。若以符號 σ 表示 $S\Pi$、ST 和橢圓弧 ΠT 所包圍的面積,則由克普勒定律 $\frac{\sigma}{\pi ab}=\frac{t}{P}$。以長徑爲直徑畫一個圓,令 $T'TN$ 垂直於 $O\Pi$。橢圓可視爲此圓的正射影,此射影使 T 點的横坐標 x 與圓上對應點 T' 相同,而縱坐標 y 一律減小到 $\frac{b}{a}y$。由此得部份圓的面積 $\Pi ST'\Pi=\sigma\frac{a}{b}$。但此面積等於扇形 $\Pi OT'$ 減去三角形 SOT' 的面積。記角 $\Pi OT'$ 爲 E (所謂橢圓上 T 點的偏近點角)。

則 $\Pi OT'$ 的面積 $=\frac{1}{2}a^2E$; SOT' 的面積 $=\frac{1}{2}OS\cdot T'N=\frac{1}{2}ae\times\times a\sin E$。

因此 $$\sigma\frac{a}{b}=\frac{1}{2}a^2E-\frac{1}{2}a^2e\sin E=\frac{a^2}{2}(E-e\sin E),$$

故 $$\sigma=\frac{1}{2}ab(E-e\sin E)。$$

但根據克普勒定律

$$\sigma=\pi ab\frac{t}{P}。$$

所以, $$E-e\sin E=2\pi\frac{t}{P}。$$

$\frac{2\pi}{P}$ 爲地球在軌道上的平均角速度,或所謂的平行度 n, 而 $\frac{2\pi}{P}t==nt$ 稱爲 T 點的平近點角,記爲 M; 因此 $E-e\sin E=nt=M$; 這就

是所謂的克普勒方程。

爲了求出 E 和 v 的關係,注意(1) $\frac{a}{b}=\frac{T'N}{TN}$, 卽 $\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}=\frac{a\sin E}{r\sin v}$, 由此 $r\sin v=a\sqrt{1-e^2}\sin E$, 及(2) $OS=ON+NS$, 卽 $ae=a\cos E-r\cos v$, 由此得 $r\cos v=a(\cos E-e)$。

囘到 $r\sin v$ 和 $r\cos v$ 的式子, 以 $\cos E$ 乘第一式, 以 $-\sin E$ 乘第二式,相加得:

$r\sin(v-E)=a\sqrt{1-e^2}\sin E\cos E-a\cos E\sin E+ae\sin E$。

由此,限於 e 的一次項得近似公式 $r\sin(v-E)=ae\sin E$。

另外, $r^2=(r\sin v)^2+(r\cos v)^2=a^2\sin^2 E(1-e^2)+$
$+a^2(\cos E-e)^2=a^2(1-2e\cos E+e^2\cos^2 E)$。

所以, $r=a(1-e\cos E)$, 因此近似地得

$$\sin(v-E)=\frac{e\sin E}{1-e\cos E}。$$

由此,在可容許的誤差(去掉 e^2 及更小的項)的範圍內得:

$v-E=e\sin E=e\sin M$　及　$v=E+e\sin M=M+2e\sin M$。

因此

$$\left.\begin{aligned} l&=\omega+v=\omega+M+2e\sin M,\\ \odot&=180^\circ+\omega+M+2e\sin M。\end{aligned}\right\}\tag{41}$$

這個公式在時間那一章 §37 中需要。

和數 $180^\circ+\omega+M$ 稱爲太陽的平黃經,並常記爲 L, 因此 $\odot=L+2e\sin M$。

若在準確的式子 $\frac{a}{r}=\frac{1+e\cos v}{1-e^2}$ 中, 代入近似值 $v=M+2e\sin M$, 則

$$\cos v=\cos M\cos(2e\sin M)-\sin M\cdot\sin(2e\sin M)=$$
$$=\cos M-2e\sin^2 M$$

及

$$\frac{a}{r}=\frac{1+e\cos M-2e^2\sin^2 M}{1-e^2}。$$

因此準確到 e^2 項得

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{a}{r}\right)^3 &= \frac{1+3e\cos M-6e^2\sin^2 M+3e^2\cos^2 M}{1-3e^2}= \\
&= \frac{1+3e\cos M+4.5e^2(\cos^2 M-\sin^2 M)-1.5e^2}{1-3e^2}= \\
&= \frac{1+3e\cos M+4.5e^2\cos 2M}{1-1.5e^2}。
\end{aligned}
\tag{42}
$$

速端曲線　設在圖 13 中 S 爲太陽中心，T 爲地球中心，TV 爲地球速度，SP 垂直於 TV，F 爲另外一個焦點，FP' 垂直於 TV。根據橢圓的有趣性質之一：由二焦點向切線所作垂線的垂足 P，P' 在以橢圓長徑爲直徑的圓（卽所謂輔助圓）上；又 $SP\cdot FP'=b^2=a^2(1-e^2)$。

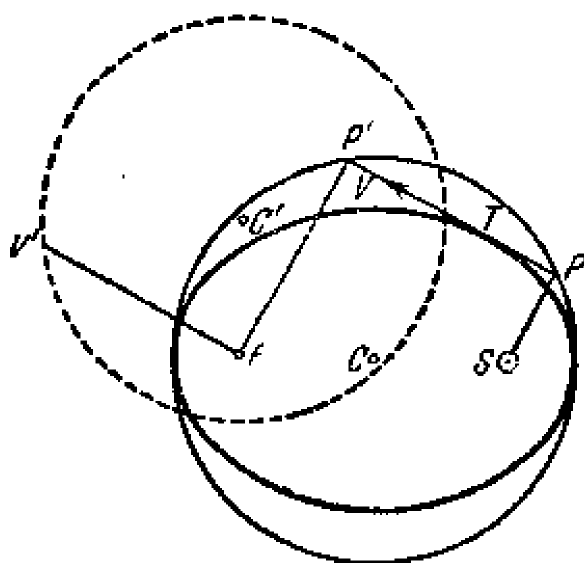


圖 13.

另外在克普勒運動中，$SP\cdot V=\frac{2\pi ab}{P}$；所以 FP' 與速度 V 成比例，而有：

$$FP'=V\frac{Pb}{2\pi a}。$$

若把 FP' 繞 F 按 T 點運動的方向旋轉 90° 到 FV'，則向量 FV'，按其方向和大小（在某種比例尺之下）將爲地球速度。把整個圓繞 F 點旋轉 90°（圖上的虛線圓），我們發現：由 F 點到圓上任何一點的向量，與橢圓上某對應點的速度 V 方向相同，大小成比例。這樣的曲線一般稱爲速端曲線，也就是說，在克普勒運動中，速端曲線就是輔助圓，只是繞着焦點 F 旋轉了 90° 而已；F 爲速度向量的起點。

第四章　球面坐標系及其有關問題

建立任何球面坐標系的一般見解，在§2中已敍述過了。在本章中我們將要熟悉一些在天文上有用的坐標系，以及坐標系間的轉換。

§24. 天球上最主要的點和圓[1]　有關鉛垂線或垂直線的基本知識已在§18中講過了。設在某地M進行觀測，鉛垂線方向是由下到上，卽由地球向天空，通過天球中心O（圖14）作平行於鉛垂線方向的直線。此直線與天球相交於一點，此點稱爲觀測地的天頂，用字母Z表示；天球面上與Z同直徑的對面一點叫天底，用字母Z'或Na表示。通過天球中心O作垂直於OZ的平面，稱爲地平面；地平面與天球表面相交的大圓稱爲地平（爲明確起見，有時叫數學地平）或地平線（圖上的$NESW$）。

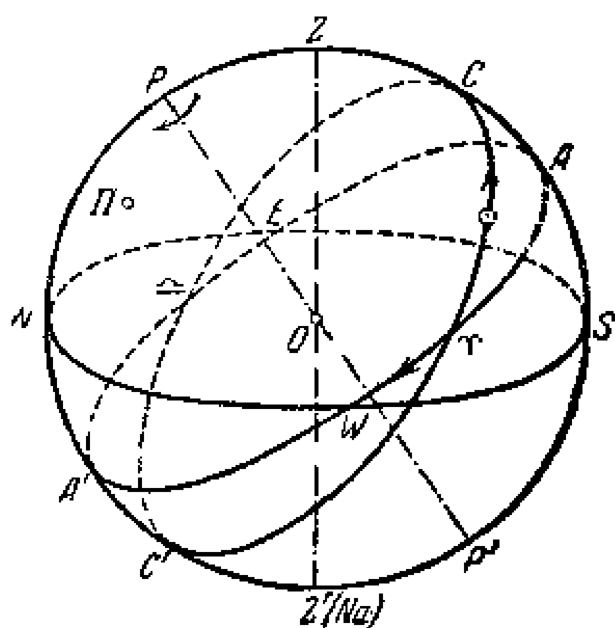


圖　14.

因地球在自轉，對於地面上的觀測者來說，好像整個宇宙是繞着一個與地球自轉軸平行的軸在自轉。通過觀測者與地軸平行的直線，在地球自轉一周內劃出了一個柱面，此柱面的軸就是地軸，同時因地球繞太陽運動，此軸又在空中移動。若恆星離地球很近，我們能覺察出此直線每天在恆星間移動，但因恆星離我們很遠，所以我們感到整個天空在繞着一條軸旋轉，此軸向着恆星之間的一點；此軸就叫天軸。星空中天

[1] 更正確地講，應該說圓周而不說圓，因這裏是指球面上的線，而圓是平面的一部份；"天球上的圓"這個稱呼已經被普遍地採用了，所以我們也不改變在一切語言裏都採用的這個術語。

軸所向的兩點叫天極；因地球自轉使我們看到恆星繞着此兩點之一按反時針方向旋轉，此點稱爲北天極，另一點稱爲南天極。

設天球直徑 POP' 與地軸平行，則 P 和 P' 就表示天極，若 P 爲北天極，則我們在天球外面由 P 點那邊看天球時，天球自轉是順時針方向的。通過 O 點而垂直於 POP' 的平面與天球相交的圓周稱爲赤道，有時爲要與地球赤道區別開而稱爲天赤道。在圖 14 中，天赤道是 $AWA'E$，箭頭表示天球自轉的方向。

通過鉛垂線及天軸的平面與天球相交的大圓叫做當地 M 的子午圈，有時爲要與地上的子午圈區別開稱爲天子午圈，平面本身就是子午面；顯然子午圈通過 Z 和 P，當然也通過 P' 和 Na（天底）。可以證明，子午面與地平面垂直，這個證明留給讀者自己來作。

子午圈與地平相交於兩點；靠近北天極的那點稱爲北點，用字母 N 表示，靠近南天極的那點稱爲南點（用 S 表示）。若面向北，則右邊距南點北點各 90° 的那一點爲東點 E，左邊與東點同直徑的那點爲西點 W。可以證明天赤道與地平正是相交於東點和西點。子午圈和天赤道當然也相交於兩點；一點在上面靠近天頂（用字母 A 表示），一點在下面靠近天底（用字母 A' 表示）。

地平分天球爲兩半；觀測者所看見的包含天頂的那一半叫上半天球，看不見的包含天底的那一半叫下半天球。天赤道也分天球爲兩半；包含北天極的那半叫北半天球，包含南天極的那半叫南半天球；子午圈也分天球爲兩半，包含東點的叫東半天球，包含西點的叫西半天球。

一切通過鉛垂線的平面都稱爲垂直面；垂直面與天球表面相交的圓圈叫垂直圈；通過東西兩點的垂直圈叫卯酉圈。

黃道爲天球上的大圓，準確地確定它的位置要比其他大圓複雜。近似地可定義爲：太陽中心在假想的天球上恆星之間的軌道，但是，顯然在地上不同的地方，所見的太陽中心的方向也不同。更近於事實的黃道定義爲：地球中心軌道平面與天球相交的大圓；但嚴格地講，地球

中心的軌道不是平面曲線。更近於平面軌道的是地月系質量中心繞太陽運動的軌道。在沒有行星的吸引作用的情形下，地月系質量中心的軌道差不多準確地在一個平面上，但是由於行星的吸引，此軌道就不在一平面上。通過太陽中心，地月系中心，及地月系中心速度方向的平面在空中緩慢地變化着；它作着（1）短周期的與（2）長周期的顫動。若在地月系中心繞太陽的運動中，拋棄（通過適當的計算來達到）短周期顫動而保留長周期顫動（周期爲幾千年），則在利用這個經過修正和簡化的軌道時通過太陽中心，地月系中心，以及地月系中心速度方向的平面叫黃道面。

通過天球中心 O，而與上面所說的那個平面平行的平面也叫黃道面；而黃道面與天球相交的大圓叫黃道。在圖 14 中，黃道通過 ♈，C，♎，C' 諸點。Π 點表示北半天球上黃道的北極。箭頭表示太陽運動的方向。

必須附帶說明，地球中心總是在黃道面附近；太陽中心與地球中心的連線與黃道面相交於一個小角度，一般不超過 $1''$，從來不到 $1''.5$。因此在某些問題中把它忽略了，而認爲地球中心在黃道面繞太陽運動；但定義黃道面這個名詞是不可能的。有時在本書中爲簡單起見，將說太陽中心沿黃道作視運動，但不必逐字去了解。

黃道與天赤道相交於正相對的兩點；在其中一點附近，太陽的周年視運動（與天球視運動方向相反）是由南半天球到北半天球，此點叫春分點，記爲 ♈❶；與它正相對的那點叫秋分點。按太陽運動的方向，黃道上與春分點相距 90° 的點叫夏至點；與它同直徑的另一點叫冬至點。這些名詞在普通天文學教本中已經建立了。所以，由春分點經夏至點到秋分點的黃道半部在北半天球上面；另一半在南半天球上面。黃道

❶ 符號 ♈ 爲羊角的圖畫，表示白羊座，春分點在白羊座時是在兩千年前，就是希臘天文學建立的時代；現在，由於歲差，春分點已移到雙魚座。秋分點有時記爲 ♎，爲天秤座的圖畫，2000 年前，秋分點在天秤座。

與天赤道相交的那個銳角叫黃赤交角，用字母 ε 表示；現在差不多等於 $23°27'$，而且正在逐漸減小。通過天極又通過春分點秋分點的大圓叫二分圈，通過天極而又通過夏至點冬至點的大圓叫二至圈。

在本書中，只能畫出由外面看到的天球的一部份。而讀者必須假想自己在裏面，好像在地上看天空一般。在各圖中，天球畫成平面，前面的一半畫實線，後面的一半畫虛線。後半面好像讀者在天球内看到的一樣。爲了用畫圖來說明問題：在圖 15 中畫出了由兩種觀點所看到的北斗七星：左面是我們在天空中看到的或星圖上所畫的形狀（由裏面看天球），右面是畫在天球儀上的形狀（由外面看天球）。圖中並畫出了（參看§26）$\delta=50°$, $60°$, $70°$ 的赤緯圈，及 $\alpha=10^h40^m(160°)$, ……$14^h0^m(210°)$的赤經圈。虛線表示由於天球自轉，莫斯科天頂在天球上經過的路徑。

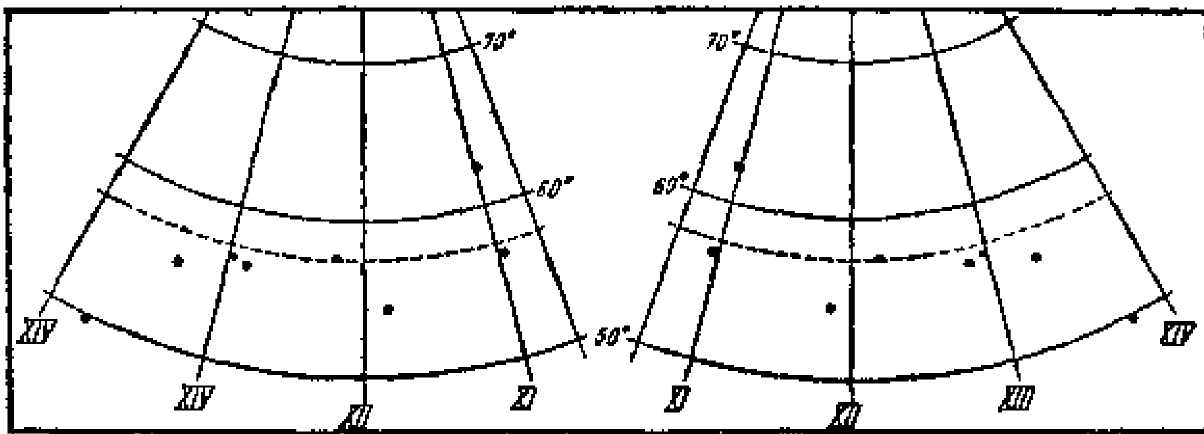


圖 15.

§25. **地平坐標系** 地平坐標系中以重力方向爲基本方向，以地平面爲基本平面。設觀測者 M 在地上（陸上，海上或空中）沿 $M\Sigma$ 方向看某天體 Σ。假設通過天球中心 O（圖 16）作直線 $O\Sigma$ 平行於 $M\Sigma$，Σ 爲 $O\Sigma$ 與天球表面的交點。由天頂 Z 畫半圓經天體 Σ 到天底，此圓稱爲 Σ 點的地平經圈。$Z\Sigma$ 弧（或所對的球心角 $ZO\Sigma$）由 Z 向 Σ 量，稱爲 Σ 點的天頂距，在 $0°$ 到 $180°$ 之間量度；記爲 z 或 ζ。$H\Sigma$ 弧或 $HO\Sigma$ 角，由 Σ 量到地平，稱爲 Σ 點的地平緯度；若 Σ 在 H 與 Z 之間，則爲正，

$Z\Sigma<90°$，若 Σ 在 H 與天底之間，則為負，$Z\Sigma>90°$。地平緯度普通用字母 h 表示，並且 h 中包含＋或－號；因此，不管 Σ 在那裏都有 $z+h=$
$=90°$。與地平平行的小圓稱為地平緯圈；在它上面的一切點具有相同的地平緯度 h。天頂距或地平緯度為地平坐標系中的一個坐標。

另外一個坐標為地平上由 S 到 H 的一段弧（其中 H 為 Σ 點的地平經圈與地平的交點）；此弧認為沿方向 $WNES$ 由 $0°$ 到 $360°$ 來量。它稱為 Σ 點的地平經度。它是子午面 $OZSZ'$ 和地平經圈 $OZHZ'$ 所確定的平面間的二面角，故此二面角也稱為地平經度。地平經度常記為 A 或 a。

顯然，若已知 z（或 h）和 A，則 Σ 在球面上的位置唯一地確定了。有時為方便起見，地平經度認為由 S 向東西兩面從 $0°$ 到 $180°$ 來量。在大地測量及航行術中，地平經度採用由 N 點沿 $ESWN$ 方向從 $0°$ 到 $360°$ 來量。因此，在每個問題中都必須考慮到地平經度的意義。

圖 16 畫出了在外面從西邊看到的天球；圖 17 中畫出的是從東邊看到的天球；$Z\Sigma$ 為 Σ 點的天頂距，$H\Sigma$ 為地平緯度；地平經度 SH 經過 W，N，E，在圖中大於 $270°$。在考慮由外面所看到的天球（向着讀者的一半）時，地平經度是由右向左增加，考慮到由裏面所看到的天球

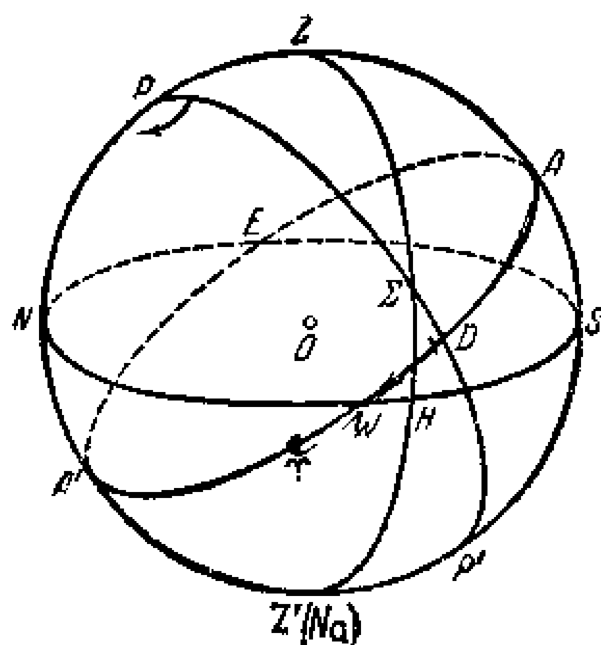


圖 16.

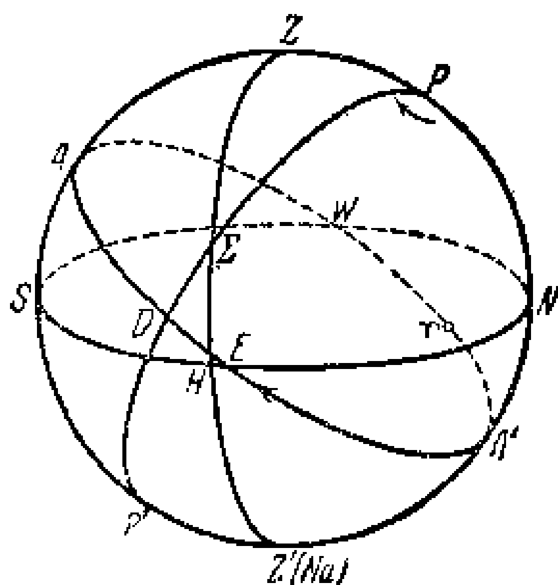


圖 17.

(畫虛線的一半)時，地平經度爲自左向右增加。

在§22中已指出，由於太陽，月球的吸引，鉛垂線對地球而言，與對地上觀測者附近的物體而言的位置都不是不變的；因此嚴格地說，天頂在天球上的位置不是固定的；但它距標準位置不遠，大約$0''.025$；這樣的量在最準確的天文觀測中都幾乎是不可能考慮到的，所以Z點每天的位移就不管了。

從另一方面，如§21中所指出的，地軸在地球體內的位置在變化着，因此天軸與鉛垂線的交角也在變化着，當然，天軸與觀測地的地平圈的交角(卽天極的地平緯度，等於當地的地理緯度)也在變化。此變化達$\pm 0''.3$，在準確的計算中必需把它考慮在內。

天極的地平緯度等於觀測地的天文緯度，因此也記爲φ；顯然，對於北半球的觀測地來說，北天極的天頂距ZP等於$90°-\varphi$。對於南半球的觀測地來說，北天極的地平緯度也等於當地的地理緯度，符號也相同；因北天極在地平線下，故爲負；因此北天極的天頂距仍然等於$90°-$ $-\varphi$：$\varphi<0°$，故$90°-\varphi$大於$90°$。

§26. 赤道坐標系　此坐標系的基本方向爲天軸，基本平面爲天赤道面。在天球上(圖16及17)，由北天極P通過天體(或天球上某點)Σ到南天極P'的半圓，稱爲此天體(或點)的時圈；時圈與天赤道的交點用字母D表示。$P\Sigma$弧(或角度$PO\Sigma$)，由北天極P量到Σ，稱爲Σ點的極距；它從$0°$量到$180°$，但普通沒有表示它的符號，我們將記它爲p。$D\Sigma$弧(或角度$DO\Sigma$)，卽由Σ到天赤道的角距，稱爲Σ點的赤緯，普通用希臘字母δ或拉丁字母D來表示。若Σ在北半天球，則赤緯爲正，在南半天球，則赤緯爲負；赤緯的正負號包含在它的符號中，故$p=90°-\delta$總成立。平行於天赤道的小圓稱爲赤緯圈。赤緯(或極距)是赤道坐標系中的一個坐標。

另外一個坐標是天赤道上的一段弧，由天赤道與子午圈的上面的交點A(卽靠近天頂的那個交點)到時圈與天赤道的交點D。此弧的方

向規定爲 $AWA'E$，即天球自轉的方向，由 $0°$ 量到 $360°$，此弧稱爲 Σ 點的時角；普通不用角度表示，而用時分秒來表示（參看第二章和第五章）。此弧也用來量度子午圈和 Σ 點的時圈之間的二面角的大小，因此，此二面角也稱爲時角。時角一般用字母 t 表示。有時爲方便起見，時角向兩邊量，向西爲正，向東爲負，但必須預先說明。

顯然，若已知天球上某點的赤緯或極距和它的時角，則此點在天球上的位置對於某給定的子午圈是唯一地確定了。

上面是赤道坐標系的一種。另一種赤道坐標系的坐標之一也是赤緯或極距，還有一個坐標也是天赤道上的一段弧，由春分點按和天球周日旋轉相反的方向量到 D（D 爲 Σ 點的時圈與天赤道的交點），稱爲 Σ 點的赤經。赤經有時用角度由 $0°$ 量到 $360°$，有時用時分秒，由 0^h 量到 24^h（h 爲拉丁字 hera“小時”的第一個字母）。赤經用希臘字母 α 或拉丁字母 A 來表示（有時用兩個字母 AR 表示，爲拉丁字 Ascencio recta“赤經”的縮寫）。顯然，若已知天球上某點的 α 和 δ，則此點在天球上的位置唯一地確定了，並與子午圈的位置無關。

由於天球自轉，黃道繞天軸旋轉，因春分點（秋分點也是）在天赤道上，故由東點上升，西點下落。由時角 t 與赤經 α 的計算方法顯然（參看圖 16）有：天赤道上由春分點 ♈ 到天赤道與子午圈的交點 A 的一段弧，等於天體或天球上某點的赤經 α 與時角 t 的和；♈A 弧稱爲對於給定的子午圈在所考慮的時刻的恆星時，用字母 s 表示（詳情見第五章）：因此下式總成立：

$$s=\alpha+t。$$

在圖 17 中，s 爲 AW♈，t 爲 $AWA'D$，α 爲 ♈WAD，容易看出來：$\alpha-s=360°-t$，$s=\alpha+t-360°$，但在角度中加或減 $360°$ 不改變此點在圓上的位置；因此在此情形中可寫爲 $s=\alpha+t$。

注意並記住天頂在赤道坐標系中的坐標；天頂的赤緯等於當地的地理緯度，時角爲零，赤經爲當時的恆星時。

從外面看天球時，在向着讀者的這一面，時角是從右向左增加，赤經是從左向右增加。在裏面看天球時（如在地面和在星圖上看天空），時角是從左向右增加，而赤經是從右向左增加；參看圖 16 及 17。

地軸在空中的方向並不是不變的，因此天極 P（當然 P' 點也是）在恆星間的位置就不是固定的；近似地可以說 P 點在繞着黃極畫着波浪式的半徑爲 $\varepsilon=23°\frac{1}{2}$ 的圓周 26,000 年一周；此現象即所謂的歲差和章動；在第十章中我們將更仔細地認識它。當然，與極同時，天赤道在恆星間的位置也在變動。由於坐標系本身這樣的變化，天體的赤經赤緯也隨時變化，與它們的自行無關。天極在天球上每天移動 $0''.054$；在某些場合裏，這樣小的角度也必須考慮在內。

§27. 黃道坐標系　此坐標系的基本平面爲黃道面，在 §24 中已定義過了。設想（圖 18）黃道的兩個極，即天球上與黃道上任一點的距離都是 90° 的點：其中靠近北天極的那點爲北極 Π，與它正相對的另一點爲南極 Π'；距離 ΠP 及 $\Pi'P'$ 當然等於黃赤交角 ε，即差不多 $23°\frac{1}{2}$。由 Π 經過天體（或天球上的點）Σ 到 Π' 的半圓稱爲天體 Σ 的黃經圈；令 B 爲黃經圈與黃道的交點。由天體到黃道的角距離 $B\Sigma$ 弧稱爲天體 Σ 的黃緯；由黃道向北爲北緯，正號，向南爲南緯，負號，用角度 0° 到 ±90° 來表示；普通用希臘字母 β 表示（有時記爲 b 或 B）。黃道上由春分點沿太陽中心周年運動方向量到天體黃經圈與黃道的交點 B 的一段弧，稱爲天體的黃經，用角度 0° 到 360° 來表示，普通記爲 λ（有時爲 l, L）。黃緯 β 和黃經 λ 組成所謂的黃道坐標系。

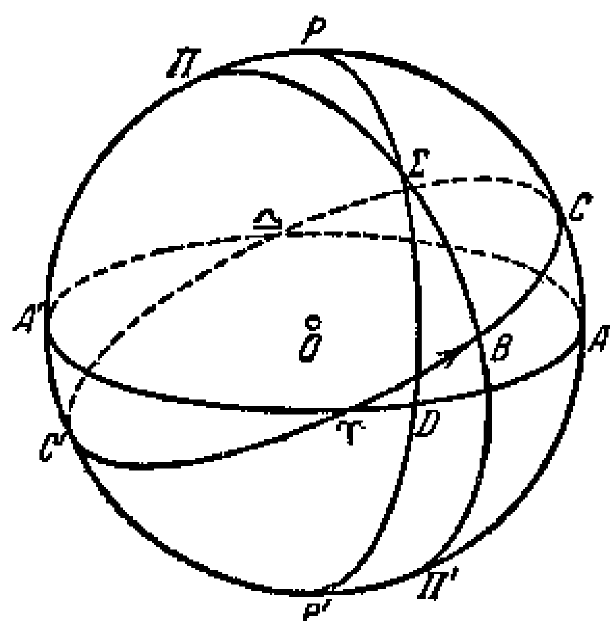


圖 18.

顯然，若某點與天球連在一起，則其 β 與 λ 不隨天球周日轉動而變化。

黃道和黃極在恆星間的位置，不是保持不變的(參看 §24 中黃道的定義)，但黃極在天球上每年只移動 $0''.47$，即約爲北天極移動值的 40 分之一。由此，恆星的黃緯比其赤緯變得慢得多，而其黃經甚至變得比赤經快些，因春分點（黃經赤經等都是由它量起）在天球上的位置是由天赤道和黃道的位置所確定(在歲差和章動那章，我們將詳細地認識它們)。

地平，赤道和黃道坐標系，是天文學中所用的最主要的坐標系：前兩個用於實用天文學中來測定天體的坐標和地面某點的經緯度，而在天體物理學中也有用；後兩個用於理論天文學中來研究天體的運動，也用於天體物理學中。

§28. 銀道坐標系　在宇宙構造的問題中，常採用所謂銀道坐標系；在其他的天文坐標系中，坐標的測定和計算，要力求最大可能的準確度，然而在銀道坐標系中，按問題的性質，要求的準確度不大，$0^\circ.1$ 就行了。在此坐標系中，基本平面是平行於銀河帶中線的小圓(與大圓差不多)的天球大圓的平面。那個大圓稱爲銀道。其位置只能近似地確定。赫爾茲勃龍格 (Hertzprung) 測定出銀道北極的坐標爲：$A = 12^h43^m$，$D = 27^\circ.2$ 下列數值常被採用：銀道與天赤道的交點的赤經爲 18^h40^m (即 $A = 12^h40^m$)，銀道與天赤道的交角等於 $62^\circ.0$ (即 $D = +28^\circ.0$)。天球上某點 Σ 到銀道的距離稱爲它的銀緯；若 Σ 與北天極在銀道的同一面，則 Σ 的銀緯爲正，反之爲負；銀緯用角度 0° 到 90° 來表示。在銀道上由銀道與天赤道的交點($\alpha = 18^h40^m$，$\delta = 0^\circ$)到 Σ 向銀道所作球面垂線的垂足的一段弧（如在其他坐標系一樣）爲 Σ 的銀經；其方向與赤經增加的方向相同，用角度 0° 到 360° 來表示。銀經和銀緯沒有特殊的符號。

§29. 各坐標系間坐標的比較　由上顯然可得下面的各坐標系間

坐標的對照表(下表):

坐標系	地平坐標系	赤道坐標系	黃道坐標系	銀道坐標系
基本方向	鉛垂線	天軸	——	·
基本圈	地平	天赤道	黃道	銀道
坐標	天頂距	極距	——	——
	地平緯度	赤緯	黃緯	銀緯
	地平經度	時角	——	——
	——	赤經	黃經	銀經

§**30. 坐標系間坐標的轉換** 在天文學中常有下面的需要:已知天體對於某一坐標系的坐標,計算它對於另一坐標系的坐標。或是由觀測所得到的地平坐標需要轉化爲赤道坐標,或是由觀測所得的赤道坐標需要轉化爲地平坐標,或在其他場合裏轉化爲黃道坐標。黃道坐標轉化爲赤道坐標也是必需要的;例如:在天體力學定理的基礎上來研究太陽系中天體(月球,太陽,行星)的運動,理論上是黃道坐標系要方便些,而在這些天體的運動表中給出的也是黃道坐標(黃經、黃緯和日心距);用到別的問題中又需要它們的赤道坐標。因此,需要由黃道坐標轉化爲赤道坐標。在本節中,我們將推出坐標轉換的公式。

I. 地平坐標系與赤道坐標系 圖 16 畫出了在外面由西邊看到的天球。P 爲北天極,$AWA'E$ 爲天赤道,Z 爲天頂,$SWNE$ 爲地平,Σ 爲天體或天球上某點。$Z\Sigma H$ 爲 Σ 的地平經圈,$Z\Sigma$ 爲其天頂距 z,$H\Sigma$ 爲其地平緯度 h;SH 爲其地平經度 A;$P\Sigma$ 爲極距,$D\Sigma$ 爲其赤緯 δ;$P\Sigma=90^\circ-\delta$;AD 爲其時角 t;符號 ♈ 表示春分點,因此 ♈D 爲其赤經 α;♈A 爲恆星時 s;$s=\alpha+t$,故 $t=s-\alpha$。

坐標變換的基礎爲以天頂——天極——天體形成的球面三角形:即三角形 $PZ\Sigma$,稱爲天文三角形。在此三角形中,$Z\Sigma=z$,$P\Sigma=90^\circ-\delta$,角 $PZ\Sigma$ 爲 $180^\circ-A$,$ZP=90^\circ-\varphi$,其中 φ 爲觀測地點的地理緯度;角 $P\Sigma Z$ 稱爲星位角;用字母 q 表示;若在天球外面看,我們認爲它

是由 ΣP 的方向順時針地轉到 ΣZ 的方向；在裏面看就相反，好像我們在地面看天空一樣；因此，對於西半天球各點爲 $0<q<+180^\circ$。

圖 17 畫出了 Σ 在東半天球時各圓的位置；現在天文三角形 $ZP\Sigma$ 爲：$ZP=90^\circ-\varphi$, $Z\Sigma=z$, $P\Sigma=90^\circ-\delta$，地平經度 A 爲 $SWNH$(圖 17 中比 270° 稍大)，因此 $PZ\Sigma=A-180^\circ$，時角 t 等於 $AWA'D$，因此角 $ZP\Sigma=360^\circ-t$；星位角 q 按定義爲負；對於東半天球各點 $0>q>-180^\circ$；也可以作爲正的，但要大於 180°，即 $180^\circ<q<360^\circ$。

1．假定已知 φ, δ 和 t；若已知 s 和 α，則 $t=s-\alpha$；所要求的是 z, A 和 q。用基本公式[參看 §9，公式(1)，(2)，(3)]對西半天球❶有：

$$\cos z=\cos(90^\circ-\varphi)\cos(90^\circ-\delta)+\sin(90^\circ-\varphi)\sin(90^\circ-\delta)\cos t,$$

$$\sin z\sin(180^\circ-A)=\sin(90^\circ-\delta)\sin t,$$

$$\sin z\cos(180^\circ-A)=\cos(90^\circ-\delta)\sin(90^\circ-\varphi)-$$
$$-\sin(90^\circ-\delta)\cos(90^\circ-\varphi)\cos t,$$

或

$$\cos z=\sin\varphi\sin\delta+\cos\varphi\cos\delta\cos t,$$

$$\sin z\sin A=\cos\delta\sin t,$$

$$\sin z\cos A=-\sin\delta\cos\varphi+\sin\varphi\cos\delta\cos t。$$

這些公式唯一地定出 z 和 A；用計算機來解很方便；用對數計算就必需用和與差的對數。爲了化成對數計算的形式，可引入輔助量 m 與 M 參看 §12)。

$$m\sin M=\sin\delta,$$

$$m\cos M=\cos\delta\cos t。$$

把量 m 與 M 代入上面的方程式，得：

$$\cos z=m\sin\varphi\sin M+m\cos\varphi\cos M=m\cos(\varphi-M),$$

$$\sin z\cos A=-m\sin M\cos\varphi+m\cos M\sin\varphi=m\sin(\varphi-M),$$

$$\sin z\sin A=\cos\delta\sin t;$$

$\sin z$ 的値在包含 $\sin z$ 的兩個方程式中，應該相同，並且按 $\sin z$ 和 $\cos z$

❶ 給讀者一個有益的習題：證明對於東半天球的公式與對於西半天球的一樣。

得到的 z 的值也應該相同；由此得出了簡單的驗算方法。

然而，利用由上面得出的下列公式，可更好地計算 A 和 z：

$$\left.\begin{aligned}\tan M=\frac{\tan\delta}{\cos t};\ \tan A=\frac{\cos\delta\sin t}{m\sin(\varphi-M)}=\frac{\cos M\tan t}{\sin(\varphi-M)};\\ \tan z=\tan(\varphi-M)\sec A_{\circ}\end{aligned}\right\}\quad(43)$$

並應記住(1)角 M 所在的象限以 $\tan M$ 的符號爲標準，即若 $\tan M>0$，必須取 M 在第一或第三象限，若 $\tan M<0$，必須取 M 在第二或第四象限；(2)若 $0<t<180°$，則 $0<A<180°$，而若 $180°<t<360°$，則 $180°<<A<360°$；(3)下式總成立：$0<z<180°$。

爲驗算起見，由上面得出公式：

$$\frac{\cos\delta\cos t}{\sin z\cos A}=\frac{\cos M}{\sin(\varphi-M)}\circ$$

左右兩端的數值應該相同，或因進位關係，只在小數最後一位相差1—2單位。

然而，必須注意到，此驗算公式不能驗出用 δ 求出的 M 值的正確性。後面相似的驗算公式也是這樣。

有時已知 φ，δ 和 $t=s-\alpha$，而只要計算 z。用下式代替 $\cos z$ 的公式還更有利[參看 §12 的結果；公式(11)]：

$$\sin^2\frac{1}{2}z=\sin^2\frac{1}{2}(\varphi-\delta)+\cos\varphi\cos\delta\sin^2\frac{1}{2}t_{\circ}$$

2. 用下列公式計算 z 和 q：

$$\cos z=\sin\varphi\sin\delta+\cos\varphi\cos\delta\cos t,$$

$$\sin z\sin q=\cos\varphi\sin t,$$

$$\sin z\cos q=\sin\varphi\cos\delta-\cos\varphi\sin\delta\cos t_{\circ}$$

引入輔助量：

$$\sin\varphi=n\sin N,$$

$$\cos\varphi\sin t=n\cos N,$$

把上面的方程式化爲：

$$\cos z = n\cos(N-\delta),$$
$$\sin z\sin q = \cos\varphi\sin t,$$
$$\sin z\cos q = n\sin(N-\delta),$$

由後面兩式驗算 $\sin z$，由第一式及後面二式驗算 z。然而，更好還是用下列公式：

$$\tan N = \frac{\tan\varphi}{\cos t};\ \tan q = \frac{\cos N\tan t}{\sin(N-\delta)};\ \tan z = \tan(N-\delta)\sec q, \quad (44)$$

驗算公式爲：
$$\frac{\cos\varphi\cos t}{\sin z\cos q} = \frac{\cos N}{\sin(N-\delta)},$$

若 $\tan N>0$，則取 N 在第一或第三象限，若 $\tan N<0$，則取 N 在第二或第四象限。在西半天球 q 小於 180°，在東半天球大於 180°。

3．若必須同時計算 z, A 和 q，則最好採用達朗貝爾方程[參看§9，公式(7)]。

在我們的場合裏，那些等式爲：

$$\left.\begin{aligned}
\cos\frac{1}{2}z\sin\frac{1}{2}(A-q) &= \sin\frac{1}{2}t\sin\frac{1}{2}(\varphi+\delta),\\
\cos\frac{1}{2}z\cos\frac{1}{2}(A-q) &= \cos\frac{1}{2}t\cos\frac{1}{2}(\varphi-\delta),\\
\sin\frac{1}{2}z\sin\frac{1}{2}(A+q) &= \sin\frac{1}{2}t\cos\frac{1}{2}(\varphi+\delta),\\
\sin\frac{1}{2}z\cos\frac{1}{2}(A+q) &= \cos\frac{1}{2}t\sin\frac{1}{2}(\varphi-\delta).
\end{aligned}\right\} \quad (45)$$

4．逆問題。設已知 φ, z, A；求 t 與 δ。由同一天文三角形 $ZP\Sigma$ 有公式：

$$\sin\delta = \sin\varphi\cos z - \cos\varphi\sin z\cos A,$$
$$\cos\delta\sin t = \sin z\sin A,$$
$$\cos\delta\cos t = \cos z\cos\varphi + \sin z\sin\varphi\cos A.$$

引入輔助量：

$$\cos z = m\cos M,$$
$$\sin z\cos A = m\sin M,$$

則得：

$$\sin\delta = m\sin(\varphi - M),$$

$$\cos\delta\sin t = \sin z\sin A,$$

$$\cos\delta\cos t = m\cos(\varphi - M),$$

由後二式驗算 $\cos\delta$ 並由第一式及後二式驗算 δ。同前面一樣，最好是用下列式子來計算 t, δ:

$$\left.\begin{array}{c}\tan M = \tan z\cos A;\quad \tan t = \dfrac{\sin M\tan A}{\cos(\varphi - M)};\\ \tan\delta = \tan(\varphi - M)\cos t,\end{array}\right\}\qquad(46)$$

關於 M, t, δ 的象限，可作與前面問題中相似的考慮。驗算公式爲：

$$\frac{\sin z\cos A}{\cos\delta\cos t} = \frac{\sin M}{\cos(\varphi - M)}。$$

必須注意到（讀者最好自己證明一下），本節中所有的公式對於南半球的觀測者也適用。地平上的基本點，地平緯度，地平經度（認爲由南點往西量），時角等的定義與以前一樣，並按一般的規則，符號 φ, δ, h 包含＋或－號在內，因此在南緯 30° 必須令 $\varphi = -30°$。地理緯度等於北天極的地平緯度或天頂的赤緯，而天頂的赤經等於地方恆星時。

II. 赤道坐標系和黃道坐標系　在圖 18 中，令 P 爲北天極，Π 爲北黃極，♈ 爲春分點❶，Σ 爲天體；則 $P\Sigma D$ 爲時圈，$\Pi\Sigma B$ 爲黃經圈，♈BC 爲黃道，♈DA 爲天赤道；♈B 爲天體的黃經 λ；♈D 爲天體的赤經。在球面三角形 $\Pi P\Sigma$ 中：$\Pi P = \varepsilon$（黃赤交角），$\Pi\Sigma = 90° - \beta$；$P\Sigma = 90° - \delta$；角 $P\Pi\Sigma = 90° - \lambda$；角 $\Pi P\Sigma = 90° + \alpha$。

1. 假設已知 $\varepsilon, \alpha, \delta$，求 λ, β。應用球面三角基本公式於三角形 $\Pi P\Sigma$，得：

$$\sin\beta = \cos\varepsilon\sin\delta - \sin\varepsilon\cos\delta\sin\alpha,$$

$$\cos\beta\cos\lambda = \cos\delta\cos\alpha,$$

❶ 記住它們的相對位置很有用：若站在天球的 Π 點上，面向 P，則春分點在 Π 點及 P 點右邊，與兩點相距各 90° 的地方。

$$\cos\beta\sin\lambda=\sin\delta\sin\varepsilon+\cos\delta\cos\varepsilon\sin\alpha。$$

引入輔助量 m 與 M,

$$\sin\delta=m\sin M,$$

$$\cos\delta\sin\alpha=m\cos M,$$

得:

$$\sin\beta=m\sin(M-\varepsilon),$$

$$\cos\beta\sin\lambda=m\cos(M-\varepsilon),$$

$$\cos\beta\cos\lambda=\cos\delta\cos\alpha。$$

用後二式驗算 $\cos\beta$，並用第一式及後二式驗算 β。但與前面一樣，用下式來計算更好:

$$\left.\begin{array}{l}\tan M=\dfrac{\tan\delta}{\sin\alpha};\ \tan\lambda=\dfrac{\cos(M-\varepsilon)}{\cos M}\tan\alpha;\\ \tan\beta=\tan(M-\varepsilon)\sin\lambda,\end{array}\right\}\quad(47)$$

與其他場合一樣，M 所屬的象限由 $\tan M$ 的符號決定。

驗算公式爲:

$$\frac{\cos\beta\sin\lambda}{\cos\delta\sin\alpha}=\frac{\cos(M-\varepsilon)}{\cos M}。$$

2. 假設已知 $\varepsilon, \lambda, \beta$; 求 α, δ; 與前面問題完全相似，有公式:

$$\sin\delta=\cos\varepsilon\sin\beta+\sin\varepsilon\cos\beta\sin\lambda,$$

$$\cos\delta\cos\alpha=\cos\beta\cos\lambda,$$

$$\cos\delta\sin\alpha=-\sin\beta\sin\varepsilon+\cos\beta\cos\varepsilon\sin\lambda;$$

$$\sin\beta=n\sin N;\qquad \sin\delta=n\sin(N+\varepsilon);$$

$$\cos\beta\sin\lambda=n\cos N;\qquad \cos\delta\sin\alpha=n\cos(N+\varepsilon);$$

$$\cos\delta\cos\alpha=\cos\beta\cos\lambda,$$

$$\left.\begin{array}{l}\tan N=\dfrac{\tan\beta}{\sin\lambda};\ \tan\alpha=\dfrac{\cos(N+\varepsilon)}{\cos N}\tan\lambda;\\ \tan\delta=\tan(N+\varepsilon)\sin\alpha\end{array}\right\}\quad(48)$$

所應遵守的規則與前面相似。

驗算公式為：

$$\frac{\cos\delta\sin\alpha}{\cos\beta\sin\lambda}=\frac{\cos(N+\varepsilon)}{\cos N}。$$

若 Σ 為太陽中心，則公式簡化了，因太陽的黃緯不超過 $1''.5$。令 α_0, δ_0, L, B 為太陽中心坐標，令 $\alpha=\Upsilon D$, $\delta=DS$, $L=\Upsilon S$, $0°$ 表示黃道上 S 點的黃緯，S 點的黃經與太陽中心相同。則(圖 19)：

$$\left.\begin{array}{ll}\sin\delta=\sin L\sin\varepsilon, & \sin L=\sin\delta\csc\varepsilon,\\ \tan\alpha=\tan L\cos\varepsilon, & \tan L=\tan\alpha\sec\varepsilon,\\ \text{若已知 }\varepsilon, L; & \text{若已知 }\varepsilon,\alpha,\delta。\end{array}\right\}\qquad(49)$$

圖 19.

欲得 α_0 和 δ_0，必須計算改正量，它等於黃緯 B 在時圈及其垂線上的投影。由圖可見，若 S 表示角 ΥSD，則

$$\delta_0-\delta=B\sin S;$$

$$(\alpha-\alpha_0)\cos\delta_0=B\cos S,$$

因此

$$\alpha_0=\alpha-B\sec\delta_0\cos S,$$

$$\delta_0=\delta+B\sin S;$$

角 S 由下列公式得出：$\tan S=\cot\varepsilon\sec L$ 或 $\tan S=\tan\alpha\csc\delta$ [參看§10，公式(9)]。

若已知 ε, α_0, δ_0，欲求 L 和 B，必須轉到上面的普遍公式，但實際上黃緯 B 常在太陽表中給出，故可由下式計算 α 和 δ。

$$\alpha=\alpha_0+B\cos S\sec\delta_0,\quad \delta=\delta_0-B\sin S;$$

知道了 $\alpha, \delta, \varepsilon$，可由上面指出的方法計算 L。

例 1. 已知：$\varphi=+55°45'.3$；$\delta=+38°43'.8$；$t=3^h21^m20^s=50°20'0''$；計算 z 和 A（公式 43）。

$\tan\delta$	9.90418	$\cos M$	9.79431	$\tan(\varphi-M)$	8.87328
$\cos t$	9.80504	$\tan t$	0.08132	$\cos A$	8.90432
$\tan M$	0.09914	$D\sin(\varphi-M)$	1.12793	$\tan z$	9.87896
M	51°29'.0	$\tan A$	1.00356	z	37°7'.0
$\varphi-M$	4°16'.3	A	84°20'.15		

驗　算

$\cos\delta$	9.89215		$\cos M$	9.79431
		9.69719		
$\cos t$	9.80504		$D\sin(\varphi-M)$	1.12793
$D\sin z$	0.21937			0.92224
		1.22505		
$D\cos A$	1.00568			
	0.92224			

在這裏，所有的中間數目，如 $\log\tan M$，都寫出來了；在某些習慣上可以而且應該避免；$\log\tan\delta-\log\cos t$ 這個相減的運算必須用算盤算或利用心算，查對數立刻寫出 M；根據對數表並立刻寫出它的到 10 的補對數和 $\log\cos A$ 的餘對數，即 $\log\sec A$。在下列例子裏，中間數目就不寫了，並用某些其他的計算方案：

例 2. 已知：$\varphi=+55°45'.3$；$\delta=+38°43'.8$；$t=3^h21^m20^s=50°20'0''$；求 z 和 q（公式 44）。

$\tan\varphi$	0.16701	$\tan t$	0.08132	$\tan(N-\delta)$	9.72170
$\cos t$	9.80504	$\cos N$	9.60047	$\cos q$	9.84274
N	66°30'.8	$D\sin(N-\delta)$	0.33149	z	37°7'.0
$N-\delta$	27°47'.0	$\tan q$	0.01328	$\sin z$	9.78063
$\cos\varphi$	9.75030	q	45°52'.6	$\sin z\cos q$	9.62337
$\cos\varphi\cos t$	9.55534	$\dfrac{\cos N}{\sin(N-\delta)}$	9.93196		9.93197

驗算在下面。

例 3. 已知：$\varphi=+55°45'.3$；$\delta=+38°43'.8$；$t=50°20'0''$；求 z, A, q（公式 45）。

$\frac{1}{2}t=25°10'.0$；$\frac{1}{2}(\varphi+\delta)=47°14'.55$；$\frac{1}{2}(\varphi-\delta)=8°30'.75$（驗算）。

$\sin\frac{1}{2}t$	9.62865	$\cos\frac{1}{2}t$	9.95668

$\sin\frac{1}{2}(\varphi+\delta)$	9.86584	$\cos\frac{1}{2}(\varphi-\delta)$	9.99518
	9.49449		9.95186
	$\frac{1}{2}(A-q)=19°13'.85$		
$\sin\frac{1}{2}t$	9.62865	$\cos\frac{1}{2}t$	9.95668
$\cos\frac{1}{2}(\varphi+\delta)$	9.83180	$\sin\frac{1}{2}(\varphi-\delta)$	9.17034
	9.46045		9.12702
	$\frac{1}{2}(A+q)=65°6'.36$		
$\sin\frac{1}{2}(A-q)$	9.51769	$\cos\frac{1}{2}(A-q)$	9.97507
$\cos\frac{1}{2}z$	9.97680		9.97679
$A=84°20'.2$;		$q=45°52'.5$;	
$\sin\frac{1}{2}(A+q)$	9.95765	$\cos\frac{1}{2}(A+q)$	9.62422
$\sin\frac{1}{2}z$	9.50280		9.50280
$\frac{1}{2}z=18°33'.5$;		$z=37°7'.0$。	

必須用$\sin\frac{1}{2}z$來求$\frac{1}{2}z$，不要用$\cos\frac{1}{2}z$，因$\frac{1}{2}z$改變1′時$\log\sin\frac{1}{2}z$改變了0.00370，而$\log\cos\frac{1}{2}z$只改變0.00004。

例4. 已知：$\varphi=+55°45'.3$；$z=45°30'.0$；$A=136°0'.0$；求t和δ(公式46)。

$\tan z$	0.00758	$\tan A$	9.98484 n
$\cos A$	9.85693 n	$\sin M$	9.77134 n
$M-36°12'.2$		$D\cos(\varphi-M)$	1.46632 n
$\varphi-M$	91°57′.5	$\tan t$	1.22250 n
$\sin z$	9.85324	t	93°25′.7
$\sin z\cos A$	9.71017 n	$\frac{\sin M}{\cos(\varphi-M)}$	1.23766

$\tan(\varphi-M)$	1.46607 n
$\cos t$	8.77672 n
$\delta+60°14'.5$	
$\cos\delta$	9.69579
$\cos t\cos\delta$	8.47251 n
	1.23766

例 5. 已知天狼星 $\alpha=6^h42^m38^s.22=100°39'33''$; $\delta=-16°38'12''$; $\varepsilon=23°26'48''$; 求 λ 和 β。

$\tan\delta$	9.47539 n	$\cos(M-\varepsilon)$	9.88196
$\sin\alpha$	9.99244	$D\cos M$	0.01920
M =	16°54'44"	$\tan\alpha$	0.72535 n
$M-\varepsilon$ =	40°21'32"		0.62651 n
$\cos\delta$	9.98143	λ	103°17'45"
$\cos\delta\sin\alpha$	9.97387	$\dfrac{\cos(M-\varepsilon)}{\cos M}$	9.90116

$\tan(M-\varepsilon)$	9.92933 n
$\sin\lambda$	9.98820
β =	39°35'22"
$\cos\beta$	9.88683
$\cos\beta\cos\lambda$	9.87503
	9.09116

例 6. 1943 年一月一日世界時 0^h。已知：月球黃經爲 204°33'14"，黃緯爲 +4°24'5"，$\varepsilon=23°26'40''$，求 α 和 δ(公式 48)。

$\tan\beta$	8.88632	$\cos(N+\varepsilon)$	9.98881 n
$\sin\lambda$	9.61863 n	$D\cos N$	0.00732 n
N	169°30'24"	$\tan\lambda$	9.65979
$N+\varepsilon$	192°57'04"	$\tan\alpha$	9.65592
$\cos\beta$	9.99872	α	204°21'42"
$\cos\beta\sin\lambda$	9.61735 n	$\dfrac{\cos(N+\varepsilon)}{\cos N}$	9.99613
		α	$13^h37^m26^s.8$

$\tan(N+\varepsilon)$	9.36167
$\sin\alpha$	9.61542 n
δ =	5°25'08"
$\cos\delta$	9.99806
$\sin\alpha\cos\delta$	9.61348 n
	9.99613

III. 赤道坐標系和銀道坐標系　北銀極的赤經記爲 A，赤緯記爲 D；銀經由天鷹座裏的一點($A+90°$, 0°)起算，銀道對天赤道的偏角爲 $90°-D$。因銀道坐標只要準確到 ±0°.1，則由銀道坐標(l, b)推出赤

道坐標(α, δ)時用圖解法或特製的近似計算表就行了。因此,僅僅爲了敍述完備起見,我們在此推出相當的公式。在三角形 $P\Gamma\Sigma$(圖 20)中,頂點爲:北天極 P,北銀極 Γ,天球上的點 Σ;$P\Sigma=90^\circ-\delta$, $\Gamma\Sigma=90^\circ-b$, $\Gamma P=90^\circ-D$。

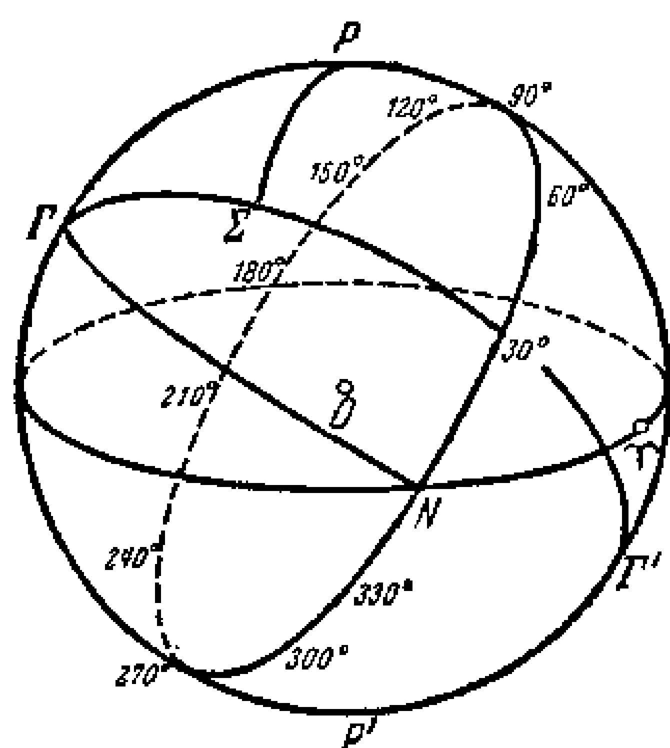


圖 20.

若 N 爲銀經 l 的起算點,則 $\Gamma N=PN=90^\circ$;角 $N\Gamma\Sigma=l$,角 $P\Gamma\Sigma=90^\circ-l$;角 $\Gamma P\Sigma=\alpha-A$。

把基本公式用於三角形 $P\Gamma\Sigma$,得:

$$\sin b=\sin D\sin\delta+\cos D\cos\delta\cos(\alpha-A);$$

$$\cos b\cos l=\cos\delta\sin(\alpha-A);$$

$$\cos b\sin l=\sin\delta\cos D-\cos\delta\sin D\cos(\alpha-A)$$

又與前面一樣,推出:

$$\sin\delta=n\sin N;\qquad \cos\delta\cos(\alpha-A)=n\cos N;$$

$$\sin b=n\cos(N-D);\quad \cos b\sin l=n\sin(N-D);$$

$$\left.\begin{array}{c}\tan N=\dfrac{\tan\delta}{\cos(\alpha-A)};\quad \tan l=\dfrac{\sin(N-D)}{\cos N}\cot(\alpha-A);\\ \tan b=\cot(N-D)\sin l\,\text{。}\end{array}\right\}\qquad(50)$$

驗算公式爲

$$\frac{\cos b\sin l}{\cos\delta\cos(\alpha-A)}=\frac{\sin(N-D)}{\cos N}\text{。}$$

下表給出銀道上銀經爲 0°, 30°, …, 等點的坐標(α, δ)(在圖 20 中近似地標出了這些點):

銀經	α	δ	星座
0°	18^h40^m	0°	天鷹
30°	19 40	+27°	天鵝
60°	21 16	+50°	天鵝
90°	0 40	+62°	仙后
120°	4 04	+50°	英仙
150°	5 40	+27°	金牛
180°	6 40	0°	麒麟
210°	7 40	−27°	船艫
240°	9 16	−50°	船帆
270°	12 40	−62°	南十字
300°	16 04	−50°	矩尺
330°	17 40	−27°	人馬

§31. 天球上點的相對位置. 角距和位置角 當然，天球上兩點 S 和 S_0 的坐標差 $h-h_0$ 和 $A-A_0$，或 $\alpha-\alpha_0$ 和 $\delta-\delta_0$，或 $\lambda-\lambda_0$ 和 $\beta-\beta_0$ 首先用來確定此二點的相對位置。但在赤道坐標系中，特別在相近的兩點（或幾個點）的情形裏採用下面兩個坐標(圖 21)：(1)由 S_0 到 S 點的角距及(2)位置角，即球面上大圓弧 S_0S 與 S_0 的赤經圈間的交角；若在天球外面看，此角認為由方向 S_0P (P 為北天極) 順時針地 (若在天球裏面看，則為反時針)旋轉到方向 S_0S，由 0° 到 360°。角距常用字母 s(或 ρ)表示，位置角用字母 p 表示。

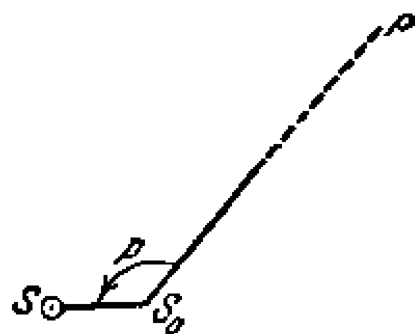


圖 21.

由坐標差$(\alpha-\alpha_0)$與$(\delta-\delta_0)$轉換到 s 與 p，或相反的轉換公式，可按我們已知的公式由球面三角形 S_0PS 推出。若 s 等於幾度時有：

$$\cos s=\sin\delta_0\sin\delta+\cos\delta_0\cos\delta\cos(\alpha-\alpha_0),$$

$$\sin s\sin p=\cos\delta\sin(\alpha-\alpha_0),$$

$$\sin s\cos p=\sin\delta\cos\delta_0-\cos\delta\sin\delta_0\cos(\alpha-\alpha_0),$$

$$\sin^2\frac{1}{2}s=\sin^2\frac{1}{2}(\delta-\delta_0)+\cos\delta\cos\delta_0\sin^2\frac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)$$

根據這些公式可由 α_0, δ_0, α, δ 計算出 s 與 p; 並根據下列公式

$$\sin\delta=\cos s\sin\delta_0+\sin s\cos\delta_0\cos p,$$

$$\cos\delta\sin(\alpha-\alpha_0)=\sin s\sin p,$$

$$\cos\delta\cos(\alpha-\alpha_0)=\cos s\cos\delta_0-\sin s\sin\delta_0\cos p$$

由 α_0, δ_0, s, p 計算出 α 與 δ。

可用與前節中相似的引出輔助量的方法來解這些方程式。

若 s 小,如只有幾秒,或不要求很準確,並且 s 與 $90°-\delta_0$ 相較也是小的,則可把三角形 S_0PS 看作狹窄的球面三角形,根據要求的準確度而用 §13 中的第一或第二近似公式。第一近似公式爲:

$$s\cos p=\delta-\delta_0,$$

$$s\sin p=(\alpha-\alpha_0)\cos\delta_0。$$

§32. 大圓在天球上的位置和軌道平面在空中的位置的確定　天球上大圓對已知坐標系的位置,用它的極的坐標來確定是最方便的。例如:在赤道坐標系中,已知大圓極的赤經爲 A,赤緯爲 D,則此大圓在天球上的位置就用此來唯一地確定了。不難證實,此大圓與天赤道的交點的坐標爲 $N=A+90°$ 及 $N'=A-90°$。交角 i 等於 $90°-D$,因此大圓對天赤道的位置就唯一地確定了。同理,若有通過天球中心的平面,只要知道它與天球相交的大圓的極的位置,則它在空中的位置就唯一地確定了。

相反地,若已知此平面與天赤道面的交線(即通過 N, $0°$ 及 $N+180°$, $0°$ 二點的直線)方向與此二平面的交角 i,則此平面及對應於它的大圓的位置的確定不是唯一的,有兩個平面(及大圓)滿足此條件。實際上,在天文學中,每個大圓(對應於每一平面)是由某點或天體的運動產生的,所以這種雙値現象可由下列的討論而消除之:(1)找出此圓的那一個極,由此極上看此點的運動爲反時針方向,(2)此大圓與坐標

系（赤道，黃道）基本圓的二交點中，找出天體由南到北所經過的一點；此點稱為大圓或平面的升交點，而另一點稱為降交點，（3）大圓對天赤道（對黃道）的偏角等於上面找出的此大圓的極與北電極（與北黃極）的角距。

時常慣於把某一大圓或平面的概念與它的極的位置在上述意義中的概念連繫起來討論，這是有用的。不少問題可用極的討論而更簡單和更明顯地解決了。

例．已知月球軌道平面對於黃道面的偏角 i 差不多是常數❶，等於 $5°9'$，但交點在黃道上逆行（即其黃經隨時間減小），周期為 18.6 年。問：月球軌道的升交點在天赤道上變化如何？月球軌道和天赤道的交角變化如何？設圖 22 為從外面看到的天球；P 為北天極，Π 為黃極，♈ 為春分點。假定由於上面所指出的，月球軌道對於黃道的運動，月球軌道的極 L 按順時針方向繞 Π 畫圓；因此，（1）月球軌道與天赤道的交角變化於 $P\Pi+\Pi L$ 和 $P\Pi-\Pi L$ 之間，即 $\varepsilon+i$ 和 $\varepsilon-i$ 之間；（2）月球軌道與天赤道的升交點（它是通過 P 與 L 的大圓的極）總是離春分點不遠，變化於 $+N_0$ 和 $-N_0$ 之間，其中 N_0 為 $P\Pi$ 與 PL 間的交角的最大值，即以 ΠL 為半徑的圓的切弧與 $P\Pi$ 的交角；不難了解，$\sin \Pi L=\sin P\Pi \sin N_0$。普通假定，若月球軌道對黃道的升交點的黃經仍記為 Ω，則在球面三角形中，角 $P\Pi L=$ $=180°-\Omega$，角 $\Pi PL=N$ 為白道對天赤道的升交點的黃經，弧 $PL=I$ 為白道與天赤道的交角，且我們就得到兩個公式：

圖　22.

$$\sin I \sin N=\sin i \sin(180°-\Omega),$$

$$\sin I \cos N=\cos i \sin \varepsilon-\sin i \cos \varepsilon \cos(180°-\Omega),$$

因 $I<90°$，故由此唯一地確定了 I 與 N。

§33．在太陽或行星表面上的點的坐標　前面看到的坐標都是用來確定在地面上的真實觀測者或者在宇宙中任一點的假想觀測者所看到的各天體的方向。除此之外，赤道和黃道坐標系還可用來確定球形天體表面上某點的位置。在地面上赤道坐標系的用法是已經知道了，用它可定出地面上各點的經緯度。現在簡單地討論一下它們怎樣應用到（1）太陽表面，（2）某一行星表面。

---

❶ 事實上，它的極繞着 L 點畫圓圈，其半徑為 $9'$，周期為 173 天，因此偏角 i 顫動於 $5°0'$ 與 $5°18'$ 之間，且月球軌道交點在黃道上作不等速的運動。

I．在觀測太陽或行星表面上的某點 A 時，它的位置可用兩個量來確定(圖 23)：(1)天體圓面中心 C 與在其表面上的 A 點的角距 s，(2)位置角，即 CA 與赤經圈 CP 的交角，其中 P 爲北天極；此角認爲由方向 CP 反時針旋轉到方向 CA，用字母 p 表示。我們把太陽中心 O 當做恰好在黃道上(其黃緯 B 在此可完全略去)，可算出(參看 §30，II. 末尾，角 $90°-S$)通過太陽中心的赤經圈與黃經圈的交角；將此角(附上適當的符號)與角 p 相加，則得太陽中心的黃經圈與 CA 的交角；用字母 q 表示。設黃道坐標系的原點爲太陽中心 O，$O♈$ 爲春分點方向，OD 爲黃極方向，若 L 爲太陽中心的地心黃經，則 $L\pm180°$ 爲地球中心的日心黃經(觀測不是在地球中心，而是在地面，但在此討論中可忽略此點)，故 C 點(太陽圓面中心)的日心黃經就是 $L\pm180°$；黃緯爲 $0°$ 因此 $DC=90°$。DC 弧爲黃經圈的平面 $TCOD$ 與太陽表面的交線；角 ATC 或 ATO 爲 C 與 A 的角距，角 $ATO=s$。在球面三角形 DCA 中的角度 DCA 就是所求的 A 點對黃經圈的位置角 q。

圖 23.

此外，由平面三角形 AOT 有：$\dfrac{\sin s}{\sin OAT}=\dfrac{OA}{OT}$；但 OA 爲太陽半徑，OT 爲太陽中心到地心的距離，因此 $\dfrac{OA}{OT}$ 就是太陽角半徑的正弦 $\sin R$；若用 ρ 表示角 COA，則角 $OAT=$ $=180°-\rho-s$，故 $\dfrac{\sin s}{\sin(\rho+s)}=\sin R$，所以 $\sin(\rho+s)=\dfrac{\sin s}{\sin R}$，由此可得 ρ，因 s，R 均爲已知：s 由測量得到，至於 R，可從天文年曆中查出其在進行觀測的那天的數值。延長 DA 交黃道於 B 點；則在球面三角形 ABC 中：AB 爲 A 點的日心黃緯 β，而若 A 點的日心黃經 $♈OB$ 記爲 λ，則 $BC=180°+L-\lambda$。由三角形 ABC 得：

$$\sin AB=\sin AC\sin ACB \quad 及 \quad \tan BC=\tan AC\cos ACB;$$

即

$$\sin\beta=\sin\rho\cos q\ (由此得\ \beta)。$$

$$\tan(L-\lambda)=\tan\rho\sin q\ (由此得\ \lambda)。$$

若已知太陽表面上某一標誌，例如黑子，的一些位置，假定黑子在太陽表面上無運動，因而黑子的 λ，β 只隨太陽自轉而變化，這時就可以確定太陽自轉軸或赤道的位置。用字母 I 表示太陽赤道對黃道的傾角，而赤道升交點(即在赤道上的黑子由南到北所經過的那點)的日心黃經用字母 N 表示。於是太陽北極的日心坐標爲：黃經 $N-90°$，黃緯 $90°-I$。至於 N 和 I 的求法，需把此事實表爲公式：黑子在幾個不同位置(λ_1，β_1，λ_2，β_2 等)上和太陽北極的角距都是一樣，比如說都等於 x。

爲此，需要求出對於坐標軸 $O♈$，$O♈+90°$，OD 的方向餘弦的式子。按照解析幾何的規則，(λ, β) 點的方向餘弦爲：$\cos\beta\cos\lambda$，$\cos\beta\sin\lambda$，$\sin\beta$，而太陽北極的是：$\sin I\sin N$，

$-\sin I\cos N$, $\cos I$, 於是

$$\cos\beta\cos\lambda\sin I\sin N-\cos\beta\sin\lambda\sin I\cos N+\sin\beta\cos I=\cos x,$$

由此
$$\cos\beta\cos\lambda\tan I\sin N-\cos\beta\sin\lambda\tan I\cos N-\frac{\cos x}{\cos I}+\sin\beta=0。$$

此方程包含三個未知量：$\tan I\sin N$, $\tan I\cos N$, $\frac{\cos x}{\cos I}$；所以，若對於太陽表面上的同一標誌至少觀測到它在三個時刻 t_1, t_2, t_3 時的位置，則可以寫出三個方程式，而由它們解出這些未知量，然後再求出 N, I, x。事實上，太陽表面上的任何標誌，特別是黑子，都有對太陽表面而言的自行；因此，N, I 的平均值要測量很多次(幾十次或幾百次)才能得到，其中每一次都不只測量三個位置，而是在看得見的太陽圓面上測量儘可能多的位置。這樣就得到了太陽赤道的坐標：升交點黃經爲 74°，傾角爲 7°。

對於研究太陽上的過程，測定不同標誌對於太陽赤道而言的坐標是很重要的。爲此就有了日面坐標：日面緯度 b 爲日面上的點到太陽赤道的距離(即該點到太陽北極的距離的餘角)；日面經度 l 爲在赤道上，由赤道對黃道的升交點到由給定點向赤道所作的球面垂線的垂足的一段弧。已知 λ 和 β，欲求 l 和 b，可利用那些用過不只一次的坐標變換公式。建議讀者自己推出下列公式(m 和 M 爲輔助量)：

$$m\sin M=\sin\beta,\qquad m\cos M=\cos\beta\sin(\lambda-N),$$

$$\tan l=\frac{\cos(M-I)}{\cos M}\tan(\lambda-N),\quad \tan b=\tan(M-I)\sin l。$$

對於同一黑子，緯度 b 應當是固定的，由對應於觀測時刻 t_1, t_2, $t_3\cdots$的量 l_1, l_2, $l_3\cdots$可推出太陽的自轉周期。

2．在行星的情形裏，更方便的是由測得的表面上的點到行星圓面中心的角距離 s，和對於赤經圈的位置角 p，推出此點的行星心赤道坐標，而不是黃道坐標。

因此(圖 24)，令 O 爲行星中心，OP 爲平行於地軸的直線，DD' 爲通過 O 點垂直於 OP 的平面與行星表面相交的大圓的一段(它不行於地球赤道)，C 爲 O 點到地球 T 的直線與行星表面的交點，故 C 爲在 T 點看到的行星圓面中心；若 a, δ 爲行星中心(實際上是 C 點)的

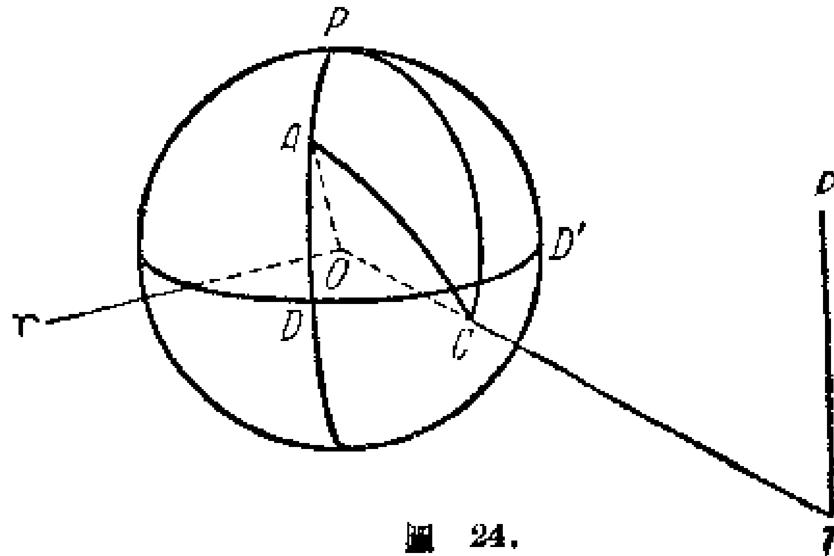


圖　24.

地心赤道坐標,則 C 點的行星心赤經與赤緯爲 $\alpha+180°$ 與 $-\delta$; TOP 平面爲在地球上看到的通過 C 點的赤經圈平面; 若 A 爲在行星面上所測量的點,則角 ATC 或 ATO 爲 s, 而行星面上 CP 與 CA 的交角爲 A 點的位置角 p。同太陽的情形一樣,記角 COA 爲 ρ, 有 $\sin(\rho+s)=$ $=\dfrac{\sin s}{\sin R}$, 其中 R 爲行星的角半徑,但現在 s, R 都很小,所以總可以取 $\sin\rho=\dfrac{s}{R}$。最後,若 A 點的行星心赤經爲 a, 赤緯爲 d, 則在球面三角形 PCA 中有: $PA=90°-d$, $PC=90°+$ $+\delta$, $AC=\rho$, 角 $PCA=p$, 角 $CPA=180°+\alpha-a$, 因此

$$\sin d=-\sin\delta\cos\rho+\sin\rho\cos\delta\cos p,$$
$$-\cos d\cos(\alpha-a)=\cos\rho\cos\delta+\sin\rho\sin\delta\cos p,$$
$$-\cos d\sin(\alpha-a)=\sin\rho\sin p。$$

若引入輔助量 m 與 M, 使

$$m\cos M=\cos\rho,\quad m\sin M=\sin\rho\cos p,$$

則得:
$$\tan(\alpha-a)=\frac{\sin M}{\cos(\delta-M)}\tan p;\quad \tan d=\tan(\delta-M)\cos(\alpha-a)。$$

由於行星自轉, a, d, ρ, p 都隨時在變化。若對於一系列的時刻 t_1, t_2, t_3…測量到了某點的 ρ 與 p, 則對每一時刻, 可由上述公式求出其 a 與 d, 然後再同太陽的情形一樣, 求出行星自轉軸北極的赤經與赤緯, 因而求出行星赤道對於在地球上所見的天赤道的升交點的黃經, 行星赤道與在地球上所見的天赤道的交角,以及行星的自轉周期。

行星表面上的點對於其赤道的球面坐標, 稱爲行星面坐標: 經度和緯度與地理坐標及日面坐標相似;被我們求出的對於地球的天赤道(其北極現在在小熊座)的 a 和 d, 稱爲行星面赤經和赤緯。行星表面上的點的行星面坐標和行星心坐標間的聯繫公式,與日面坐標和日心坐標間的聯繫公式完全相似(僅名字不同而已㊀)。

㊀ 譯者註: 此處原有一註,但純粹爲俄文名詞的問題,故略去。

第五章　時間的測量

§34. 測量時間的基礎　我們還沒有任何根據來認爲地球自轉每天的不均勻程度大到可以由觀測發現，只能由觀測月球，水星，金星，地球和木星的第一衛星的公轉中，發現在幾年內這種自轉略有不均勻；每天的不均勻程度是微不足道的。因此地球自轉的周期可作爲時間的基本單位，並且地球由某一個初始位置起所轉的角度，可作爲由在此初始位置的時刻以後所經過的時間的量度。初始時刻取地理子午線經過天球上某點時的時刻，卽此點經過當地子午圈的時刻；由此時刻以後所經過的時間稱爲當地的地方時，例如，莫斯科地方時，格林尼治地方時。顯然，在同一地理子午線上各地，地方時都相同。根據所採用的天球上的點，在天文中採用兩種時間：恆星時和太陽時。

§35. 恆星時　取春分點爲標準，它經過子午圈時作爲地方恆星時的開始。春分點連續兩次上中天的時間間隔，稱爲恆星日。春分點上中天就作爲恆星日的開始。由春分點上中天到所考慮的時刻，地球所轉的角度，卽春分點的時角，被取爲由春分點中天到這個所考慮的時刻所經過的時間的量度。把此角度用時，分，秒來表示，簡單地說：在地球上任一地方，在任一時刻的當地地方恆星時等於在該時刻的春分點的時角；更正確地說：地方恆星時以春分點的時角來量。恆星時的時，分，秒由 $0^h0^m0^s$ 計算到 $24^h0^m0^s$。地方恆星時用 s 表示。

春分點在天球中看不見；因此不可能直接得到它上中天的時刻來作爲恆星日的開始。但假定某一個赤經爲 α 的恆星 Σ 正在上中天。則一方面由赤經 α 的定義，它等於天赤道上由春分點到 Σ 的赤經圈與天赤道的交點 D 的一段弧(天赤道的)；另一方面，春分點在這時刻的時角爲春分點的赤經圈與子午圈之間的二面角，又此時 Σ 的赤經圈與子午圈相合；此二面角就是用上面提到的弧來量的，因此 $s=\alpha$，卽：在恆星

上中天時，其赤經等於當地的地方恆星時。若時角爲 t，則由圖 16 與 17 可看出：$\Upsilon A=\Upsilon D+DA$ 卽永遠有 $s=\alpha+t$，恆星時等於某恆星的赤經與其時角之和。

因此，若能夠在所考慮的時刻，由觀測確定某恆星的時角，並已知此恆星的赤經，則相加便得當時的恆星時。其他的方法在實用天文學中論述。

恆星時和平太陽時（參看§ 36）都是天文學中的基本時間；因此有照恆星時走的鐘，此鐘的針在一恆星日內轉 $24^h0^m0^s$ 。

現在指出下面的情況是恰當的：實際上，恆星時的問題由於春分點的位置在天球上變化而成爲複雜的。由於赤道面和黃道面的運動，春分點不斷地在黃道上朝與太陽周年運動相反的方向運動（歲差），並且速度在變化（章動）。然而，這些詳細情況等到在第十章裏熟悉了歲差章動以後再講。原則上這不會破壞本節所論述的規律性。

§36. 太陽時：眞太陽時和平太陽時；時差 有兩種太陽時：眞太陽時和平太陽時。眞太陽時是由眞太陽圓面中心的周日運動所確定的時間，而平太陽時則爲所謂的平赤道太陽的中心的運動所確定。

眞太陽圓面中心上中天的時刻稱爲眞中午，下中天的時刻稱爲眞子夜。連續兩次眞中午的時間間隔稱爲眞太陽日，由眞中午開始。取太陽圓面中心對於當地子午圈的地心時角❶作爲在眞中午以後所經過的時間；用時，分，秒表示，這就是說，地方眞太陽時等於太陽圓面中心的時角。眞太陽時由中午到中午，從 $0^h0^m0^s$ 計算到 $24^h0^m0^s$ 。

然而，眞太陽時在實用上並不方便，因太陽中心的時角不是和地球自轉角度成比例地變化。如果太陽赤經均勻地隨時間增加，則它才和這個角成比例地變化。但由於下面兩種原因：(1)太陽不是在天赤道上而是在黃道上運動；(2)太陽在黃道上的運動不是均勻的，使得太陽赤

❶ 必須加上"地心"這兩字，因在地面和在地心所看到的太陽中心的方向不同（視差的影響）。

經變化不均勻。地球在黃道上的不均勻運動(太陽的視運動也是這樣)，更準確地說是地球黃經的不均勻的增加（太陽也是這樣），主要產生於地球中心的運動軌道為橢圓，次要原因為月球及行星對地球的攝動作用❶。

由幾百年觀測的綜合和天體力學的理論研究可算出每天（或每年或每一百年）太陽黃經增加的平均值 n，及在某時刻 t_0 的平黃經 L_0，因此由公式 $L=L_0+n(t-t_0)$ 可算出任何時刻 t 的平黃經。

因而，為要創立一個其赤經隨時間成正比例增加的點，就設想有一點在天赤道上運動，使在任何時刻 t，其赤經 A 等於太陽的平黃經，即 $A=L_0+n(t-t_0)$；此點就叫做平赤道太陽的中心。在地球上某地，平赤道太陽中心上中天的時刻稱為當地的平中午；平赤道太陽中心的時角稱為地方平太陽時；平赤道太陽中心下中天時，稱為平子夜。當然，平赤道太陽和春分點一樣在天球上看不見，但可以算出它和眞太陽中心的赤經差。事實上，眞太陽中心的黃經和黃緯可由太陽運動中算出，而由天文年曆及坐標變化規律可算出眞太陽的赤經 α_0 和赤緯 δ_0，而平太陽赤經可由上面指出的公式 $A=L_0+n(t-t_0)$ 算出；在天文年曆中給出了每個格林尼治平子夜的 A 和 α_0，δ_0。根據年曆並採用內插法，可算出任何時刻的 α_0 和 A 的值。

設在某時刻，這些赤經為 α_0 和 A。設當時恆星時為 s；根據一般的規則，眞太陽的時角，即眞太陽時 $t_\odot$，應當等於 $s-\alpha_0$，而平太陽時 T 在此時等於 $s-A$。它們的差 $T-t_\odot=(s-A)-(s-\alpha_0)=\alpha_0-A$ 稱為時差。在天文年曆中給出了時差的值，但是很遺憾，還沒有建立統一的時差定義，到底採用：眞太陽時－平太陽時 $=t_\odot-T=A-\alpha_0$，或反之，平太陽時－眞太陽時 $=T-t_\odot=\alpha_0-A$；因此，在使用某一本天文年曆時必需

❶ 月球及行星對於地球的周期攝動不超過下列數值：月球為 $\pm 7''.31$，水星為 $\pm 0''.06$，金星為 $\pm 17''.57$，火星為 $\pm 7''.02$，木星為 $\pm 15''.65$，土星為 $\pm 1''.04$，總共小於 $48''.71$（根據紐康的太陽表）。

注意到它所列的時差是（眞太陽時－平太陽時）或是（平太陽時－眞太陽時）。

由上顯然可知：在某地平中午時，地方恆星時等於 A，地方眞太陽時等於 $A-\alpha_0$，其中 A 和 α_0 表示平赤道太陽中心和眞太陽中心在平中午時的赤經。從另一方面，在某地平子夜時，地方恆星時等於 $A+12^h$，地方眞太陽時等於 $A-\alpha_0+12^h$，其中 A 和 α_0 表示平赤道太陽和眞太陽中心在平子夜時的赤經。

有時，在天文曆書中，如在天文年曆，給出了在每個格林尼治子夜格林尼治子午線的眞太陽時爲 $A-\alpha_0+12^h$ 來代替時差。顯然 $A-\alpha_0=$ $=(A-\alpha_0+12^h)-12^h$。

顯然，在同一子午線上各地，任何時間（恆星時，平太陽時，眞太陽時都一樣），當爲天球上某點的時角，都是相同的，在其他的子午線上，僅差一個經度差，在本初子午線東面的子午線上，天體時角要大些，在西面的子午線要小些。

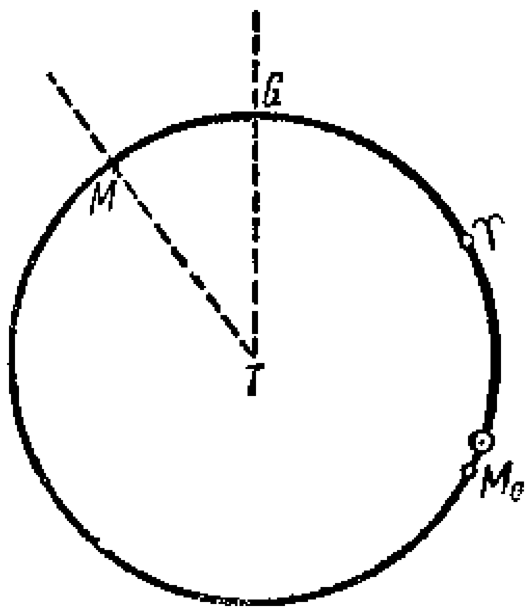


圖 25.

下面簡圖（圖 25）用來表示上面所說的，圖中圓圈表示天赤道；♈ 爲春分點，M_0 爲平赤道太陽的中心，⊙ 爲在天赤道上赤經與眞太陽相等的點；因此，它與眞太陽有相同的赤經圈和時角；圓心 T 爲地球；通過 T 點的半徑表示各子午圈；地球自轉（也就是子午圈旋轉）的軸垂直於赤道面；必須設想旋轉是按反時針方向的；由某子午圈沿順時針方向量到天赤道上某點的角（或由半徑與圓周的交點量到該點的弧）爲該點對於此子午圈的時角。

因此，如 TG 表示格林尼治子午圈，TM 爲莫斯科子午圈，則 $G♈$ 和 $M♈$ 爲格林尼治和莫斯科的恆星時，GM_0 和 MM_0 爲兩地的平太陽

時，$G\odot$ 和 $M\odot$ 爲眞太陽時。在所有的子午線上的任何時間都因地球自轉而增加，但同時兩個太陽的赤經，即由♈反時針方向量到 M_0 及 $\odot$ 的弧，很慢地增加。M_0 均勻地運動，$\odot$ 不均勻，有時在 M 的後面，有時在前面；$\odot M_0$ 弧爲時差。當半徑 TM 或 TG 經過 M_0 時，就是該子午線的平中午；此時 ΥM_0 弧爲此子午線在平中午的恆星時，12 小時後（平太陽時）此半徑的延長線經過 M_0（此時 M_0 已前進一點），就是此子午線的平子夜；$\Upsilon_0 M+12^h$ 就是平子夜的恆星時。

太陽運動表由觀測和天體力學定理多次綜合而成。根據紐康在十九世紀末的研究，計算平太陽赤經的數字公式爲

$$A=18^h38^m45^s.836+8640184^s.542\,T+0^s.093\,T^2,$$

其中 T 爲由1900年一月格林尼治0日平子夜起算的儒略世紀（即36525平太陽日）。一直到現在還按照此公式算出載於天文年曆中的每個格林尼治平子夜的恆星時。

此公式和上述的一些地方需要一點補充的解釋，但等到我們熟悉了光行差，歲差和章動以後，在十一章中（§94）再講。

人類活動在一晝夜中是以平太陽時爲準，但以平子夜作爲一日的開始；由平子夜開始計算的時間叫民用時，故民用時＝平太陽時 $+12^h$。日期（即某月某日）按照民用時計算，而不根據其他標準。

1925 年以前，天文學家用平太陽時，故日期由平中午開始；從 1925 年起就用民用時計算時間了，因此日期在晚上更換。從同一個時候開始，在天文年曆中載出了每個格林尼治平子夜的天體坐標（月球坐標則每小時列出），除去一些例外情形，這都會註明的。

§37. 時差的近似計算法　如果假定太陽準確地在橢圓上運動，就可算出時差的近似值。在 §23（公式 41），我們已推出太陽眞黃經的公式爲

$$\odot=180^\circ+\omega+M+2e\sin M=L+2e\sin M,$$

其中 L 爲太陽平黃經。

因略去了 e^2 項，故公式的誤差在 $\pm4^s$ 範圍內；這裏不把月球和行星的攝動影響計算進去，它所可能產生的誤差不到 $\pm3^s$。眞太陽中心的赤經 α_0 可由球面三角公式（參看圖 19）得

出爲：$\tan\alpha_0=\tan\odot\cos\varepsilon$。

由此公式得：

$$\tan\odot-\tan\alpha_0=(1-\cos\varepsilon)\tan\odot,$$

$$\sin(\odot-\alpha_0)=2\sin^2\frac{1}{2}\varepsilon\sin\odot\cos\alpha_0=\sin^2\frac{1}{2}\varepsilon\sin 2\odot$$

而準確到 $\sin^2\frac{1}{2}\varepsilon$ 的一次項有：

$$\alpha=\odot-\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\sin 2L;$$

$$A=L=180^\circ+\omega+M=\odot-2e\sin M=\odot+2e\sin(L-\omega)。$$

因此

$$時差=平太陽時-眞太陽時=\alpha_0-A=-\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\sin 2L-2e\sin(L-\omega)。$$

這裏 L 表示太陽平黃經，ω 爲地球軌道近日點的黃經；用數字表示爲：

$$\sin^2\frac{\varepsilon}{2}=0.04128=141'.9=9^m.46;\ 2e=0.0335=115'.2=7^m.68;$$

每年一月一日，太陽平黃經差不多等於 280°，每天增加爲 $0^\circ.9856$；因此 $L=280^\circ+0^\circ.9856\,t$；其中 t 爲一月一日以後的天數；$\omega=102^\circ$；因此，平太陽時－眞太陽時 $=-9^m.5\sin 2L+$ $+7^m.7\sin(L+78^\circ)$，可能的誤差爲 $0^m.1—0^m.2$。此公式指出，時差近似值由兩項正弦函數相加而成：其中一個的周期爲半年，另一個爲一年。圖 26 畫出了時差由兩個正弦函數合成及其在一年內的變化。用 § 36 中所述方法算出的時差的準確值一年之後就不再準確地重覆了。

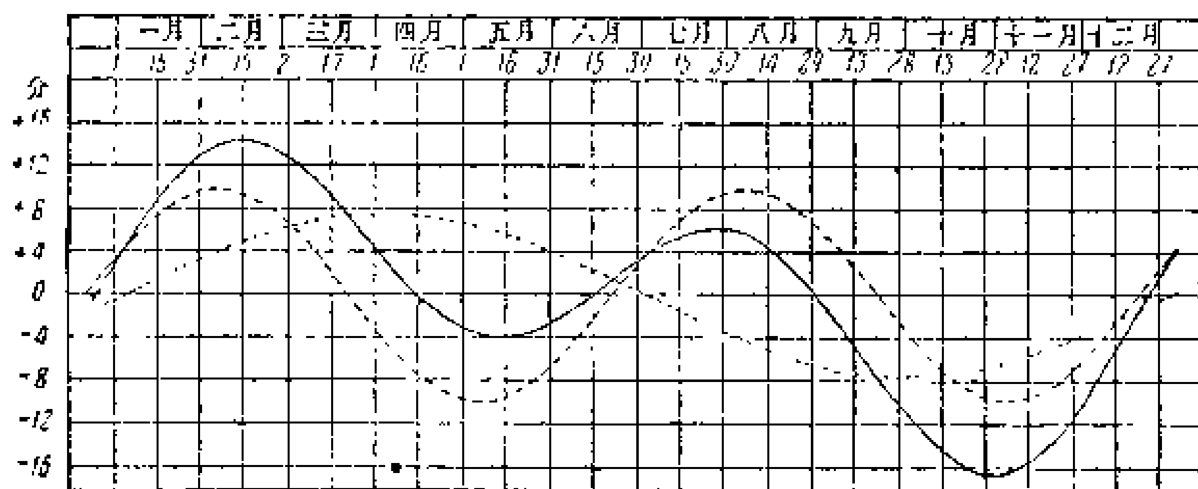


圖　26.

§38．平太陽日和恆星日的相對長度　平赤道太陽在天赤道上運動，速度爲眞太陽的平均角速度，此平均角速度是對於一長時期（幾百年）而言的。觀測太陽過春分點的時刻，每兩次觀測相隔的時間都很長，從這些觀測的對比中得出：太陽連續兩次過春分點的時間間隔平均爲

365.2422 平太陽日。這就是所謂的回歸年。故在一平太陽日內，平赤道太陽遠離春分點的角度等於 $\frac{360°}{365.2422}=\frac{24^h}{365.2422}$；而由此得到，一平太陽日內春分點時角，即恆星時，的增加量不是 24^h 而是 $24^h+\frac{24^h}{365.2422}$；即一平太陽日或 24 個平太陽小時的長度等於恆星時的

$$24^h\left(1+\frac{1}{365.2422}\right)=24^h\times\frac{366.2422}{365.2422}=24^hk，\text{或 } 24^h3^m56^s.5554 。$$

反之，一恆星日或恆星時的 24^h 等於平太陽時的 $24^h\frac{365.2422}{366.2422}=24^hk'$，或 $23^h56^m4^s.0905$ 。由此用除法得：

平太陽時的 1 小時＝恆星時的 1 小時 $+0^m9^s.8565$，$k=1.0027379$

平太陽時的 1 分 ＝恆星時的 $1^m0^s.1642$，

恆星時的 1 小時＝平太陽時的 1 小時 $-0^m9^s.8296$，$k'=0.9972696$

恆星時的 1 分 ＝平太陽時的 $1^m-0^s.1648$ 。

根據這些關係，對任何時間間隔，知道了平太陽時的時，分，秒就可以轉化為恆星時的時，分，秒，反之亦可。為計算簡便起見，在天文曆書中有特製的表。

§39. 化民用時為恆星時及相反的轉化 設已知某時刻的地方民用時為 m_c；為要算出此刻的恆星時，必須知道當日當地子夜時的恆星時，設為 s_0；由子夜起經過了平太陽時的 m_c 時，分，秒。如前節所講者一樣，將此時間間隔表為恆星時；令 km_c 為對應的恆星時的時，分，秒數；即由子夜到所考慮時刻經過了恆星時 km_c，而此時刻的恆星時為 $s=s_0+km_c$；若比 24^h 大，則在此和數中減掉 24^h 。剩下的問題就是如何求 s_0 。

在天文曆書中，載出了對於格林尼治子午線在格林尼治平子夜時的恆星時 S_0；在 §36 中已經解釋過了，這個就是平太陽的赤經；它在每一平太陽日內增加 $3^m56^s.555$ 。若所考慮的地方(其子午線)位於格林尼治之東，經度以小時及其小數表示為 λ，則當地的子夜比格林尼治

早 λ 小時來到，因而在當地子夜時平太陽赤經或恆星時要比 S_0 小 $3^m56^s.555\frac{\lambda}{24}$。就是說

$$s_0=S_0-\frac{\lambda}{24}\times 3^m56^s.555\text{。}$$

因此

$$s=S_0-\frac{\lambda}{24}\times 236^s.555+m_c\times\frac{366.2422}{365.2422}=$$
$$=S_0-\frac{\lambda}{24}\times 236^s.555+m_c+\frac{m_c}{365.2422}\text{。}$$

逆問題　若在某時刻地方恆星時爲 s，要算出地方民用時，則重新按照天文年曆算出地方（或格林尼治）平子夜的恆星時 s_0，並由 s 減去 s_0；若 s 小於 s_0，則在差數中加上 24^h；由此得出從平子夜到所考慮的時刻用恆星時表示的時間間隔 $s-s_0$，變爲平太陽時單位，就得到所求的民用時。由此得公式：

$$m_c=\left[s-\left(S_0-\frac{\lambda}{24}\times 236^s.555\right)\right]\frac{365.2422}{366.2422}=$$
$$=\left[s-\left(S_0-\frac{\lambda}{24}\times 236^s.555\right)\right]\left(1-\frac{1}{366.2422}\right)\text{。}$$

由民用時減掉 12^h 即得平太陽時。

必須注意，由於在每一民用日內，也就是在 24 個平太陽小時內，有兩個時刻恆星時相同，一個在當日開始不久（不超過 3^m55^s），另一個接近於當日末尾——不早於 3^m55^s；其原因當然是恆星日比平太陽日短了 3^m55^s。因此，在實際計算時，必須考慮到對應於已知恆星時的是這兩個時刻中的哪一個。

對於準確到 5 分的由民用時（或平太陽時）到恆星時的轉化或反轉化，可用下面這個給出子夜的恆星時的表：

3 月 23 日…12^h	4 月 22 日…14^h	5 月 23 日…16^h	6 月 22 日…18^h
7 月 23 日…20^h	8 月 22 日…22^h	9 月 22 日…0^h	10 月 22 日…2^h
11 月 22 日…4^h	12 月 22 日…6^h	1 月 21 日…8^h	2 月 21 日…10^h

對於任何其他的日期，把每天的變化當爲 4 分，可由表中最相近的日期算出恆星時。

例 1. 1941 年 11 月 16 日莫斯科地方民用時 $15^h45^m30^s.25$ 時的眞太陽時爲何？莫斯科位於東經 $2^h30^m17^s.03$。顯然需要求出當時的時差，卽在格林尼治民用時或世界時爲 $15^h45^m30^s-2^h30^m17^s=13^h15^m13^s$ 時的時差。根據天文年曆，對於下列日期格林尼治平子夜，在眞太陽時－平太陽時的意義下的時差值爲：

1941 年 11 月 15 日	$+15^m28^s.16$		
		-10.14	
11 月 16 日	$15^m18^s.02$		-0.85
		-10.99	
11 月 17 日	$15^m\ 7^s.03$		-0.86
		-11.85	
11 月 18 日	$14^m55^s.18$		

以 11 月 17 日子夜爲準，對所需要的時刻進行內插法：

$$n=\frac{10.747}{24}=0.4478;\quad \frac{1}{2}n(n-1)=-0.124;\quad \frac{1}{2}n^2=0.100。$$

根據白塞耳公式

$$\text{眞太陽時}-\text{平太陽時}=15^m7^s.03+10^s.99\times0.4478+0^s.86\times0.124=+15^m12^s.06,$$

或根據斯特林公式

$$15^m7^s.03+0.4478\times11^s.42-0.100\times0^s.86=+15^m12^s.06。$$

因此，在給定時刻的眞太陽時爲

$$15^h45^m30^s.25-12^h+15^m12^s.06=4^h0^m42^s.31。$$

例 2. 1941 年 11 月 16 日，莫斯科民用時 $15^h40^m30^s.00$ 時的恆星時爲何？莫斯科位於東經 $2^h30^m17^s$。由天文年曆查出：11 月 16 日格林尼治子夜的恆星時爲 $3^h38^m41^s.521$。我們算出：當日莫斯科子夜的恆星時爲 $3^h38^m41^s.521-\frac{2\ 505}{24}\times3^m56^s.555$（此減數對於此子午圈永遠是這樣算）$=3^h38^m41^s.521-24^s.690=3^h38^m16^s.83$。從當地子夜到所給時刻經過了 $15^h40^m30^s.00$（平太陽時），卽 $15^h40^m30^s.00+2^m34^s.50$（參看第 95 頁的數字）$=$ $=15^h43^m4^s.50$（恆星時）。因此，所需要的恆星時爲 $3^h38^m16^s.83+15^h43^m4^s.50=$ $=19^h21^m21^s.33$。

例 3. 1941 年 12 月 7 日，依爾庫次克（Иркутск）地方恆星時 $23^h31^m0^s.00$ 時的地方民用時爲何？依爾庫次克位於東經 $6^h57^m22^s.9=6^h.956$。在天文年曆中找出：12 月 7 日格林尼治平子夜的恆星時爲 $5^h1^m29^s.21$。因此，在依爾庫次克平子夜的恆星時爲 $5^h1^m29^s.21-$ $-\frac{6.956}{24}\times3^m56^s.555=5^h1^m29^s.21-68^s.56=5^h0^m20^s.65$。故由當地子夜到所考慮時刻經過了 $23^h31^m0^s.00-5^h0^m20^s.65=18^h30^m39^s.35$（恆星時）或（參看 95 頁的數字）$18^h30^m39^s.35-$ $-181^s.95=18^h27^m37^s.40$（平太陽時）。這就是所要求的民用時。

§40. 區時和法定時;日界線 地方時對於全國的需要不方便,例如對於編鐵路時間表就不方便。這可由全國都採用首都的地方時而避免,但若不同國家的時間差別不是整小時,則對國際連絡又不方便。現在,全世界差不多都採用區時,這樣由上述所產生的不方便就消除了。假定全球按子午線劃分爲 24 個區,每區的寬度爲 15°,而且零區的平均子午線經過格林尼治,第一,第二,…,到第二十三區的平均子午線爲格林尼治以東 15°, 30°,…, 345° 的子午線;並同意每區內所有地方都用本區的平均子午線的民用時,故在任何時刻,全球各地時間的分,秒數都相同,只相差整小時。然而區的界線並不像幾何上的那樣準確,而是按國界的;在經度範圍很廣大的國家內,例如蘇聯,也按地區或主要的鐵路,河流等來劃分。這麼一來,英國,法國,西班牙的區時就是格林尼治民用時,在中歐(德國,意大利,斯堪的那維亞,巴爾幹半島)的時間都比格林尼治早一小時(即所謂中歐時,第一時區)。在蘇聯,西部位於第二時區,以東在以後的時區,最東的部份,楚可次基半島(Чукотский полуостров)位於第十二時區(圖 27)。

不難證實,若某點位於東經 λ, 用時,分,秒表示,而 n 爲其區數,則在此點,地方時 − 區時 $=\lambda-n$ 小時。

格林尼治民用時在實行區時後簡稱爲"世界"時。

從 1930 年 6 月 16 日起,蘇聯政府法定,各地時間按各區時往前撥快一小時;這種時間通常稱爲法定時。有些別的國家(如西歐,美國)僅在夏季往前撥一小時(所謂夏季時)。這種時間實行的開始和取消,每年由各國的政府規定。

若在歐洲是,比方說,一月一日中午,則在歐洲以東的地區是下午,而越東則越接近於一月一日和一月二日之間的子夜;反之,歐洲以西的地區爲上午,而越西就越接近於十二月三十一日和一月一日之間的子夜;故必須承認,總有一個地方首先發生由十二月三十一日到一月一日及一月一日到一月二日的日期更換。現在公認,這個日界線經過太平

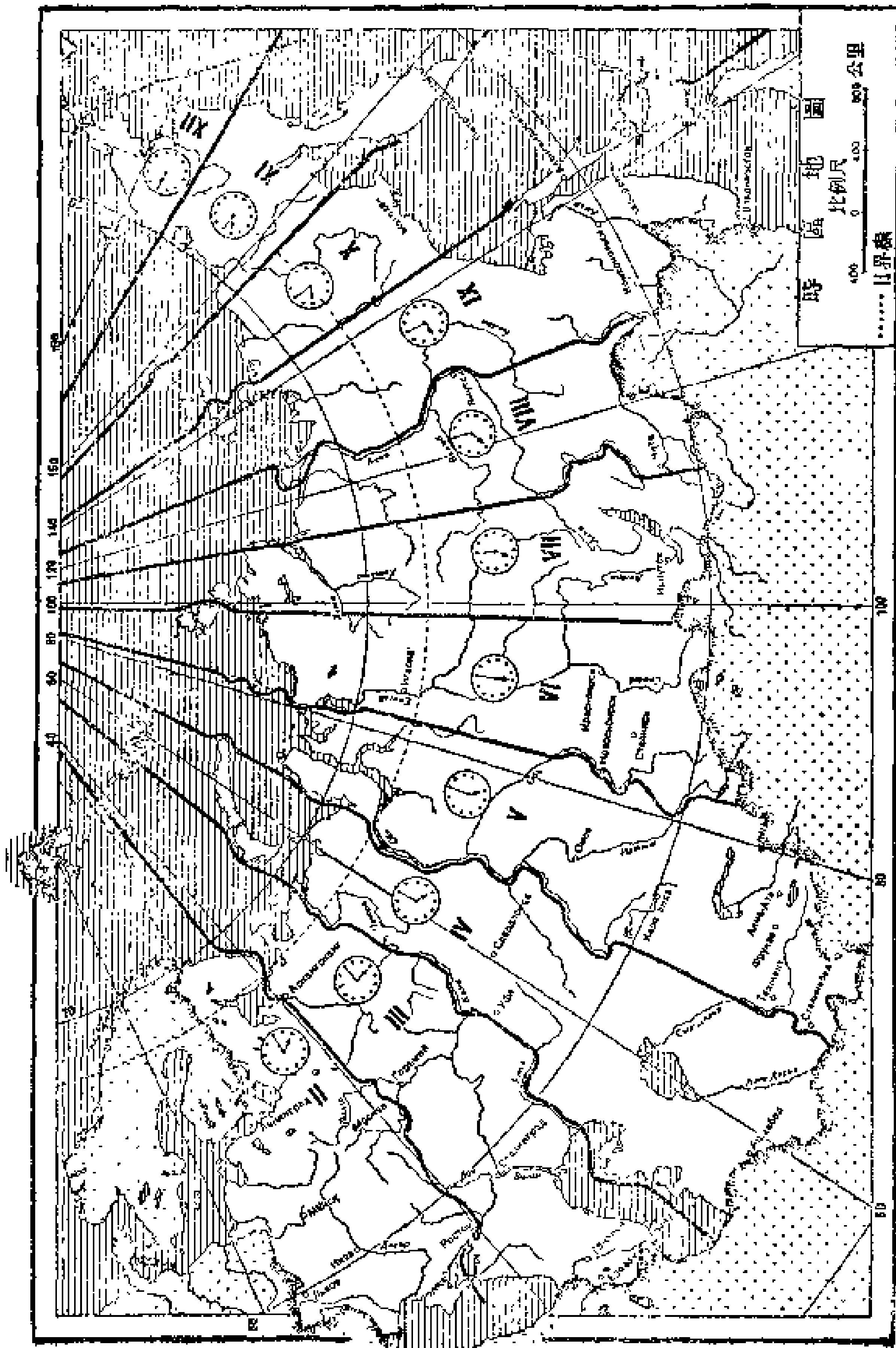


圖 27

洋,絕大部份在距格林尼治 180° 的子午線上,但遇到島和岬,則從旁繞過;現在劃定如下❶:由北極沿 180° 的子午線到($\lambda=180°$, $\varphi=70°$),從東邊繞過佛朗吉耳島,然後到 (169°, +65°) 向 (170°, +52°30′) 向 (180°, +48°),再沿 180° 的子午線到 $\varphi=-5°$,以後向 (172°30′, −15°30′),沿 172°30′ 的子午線到 $\varphi=-45°30'$,又向(180°, −51°30′),以後就沿 180° 的子午線. 海船和飛機經過此線,若由西向東,則重複一天(兩天算同一日期),由東向西經過此線時則增加一天(有一天不算進去)。

§41. 各種時間的對照及符號 令 k 表示由平太陽時化爲恆星時的係數 366.2422/365.2422, $k'=\frac{1}{k}$ 表示相反的換算的係數; T_0 爲某時刻的格林尼治民用時或世界時; S_0 爲當天格林尼治民用(平)子夜的恆星時,卽平赤道太陽在此子夜的赤經加 12^h; λ 爲某地經度,由格林尼治向東量; n 爲當地的時區數。則在此地與其此子午線上有:

(1)區時 $=T_n=T_0+n$;

(2)法定時 $=T_n+1^h$;

(3)地方民用時 $m_c=T_0+\lambda=T_n+\lambda-n$;

(4)地方平太陽時 $m=m_c-12^h=T_0+\lambda-12^h$;

(5)地方眞太陽時 $t_\odot=m-$時差(眞太陽時－平太陽時)

$=T_0+\lambda-12^h-$時差(眞太陽時－平太陽時);

(6)地方平子夜或民用子夜的恆星時

$$s_0=S_0-236^s.555\times\frac{\lambda}{24}\text{(λ 以小時及其小數表出)};$$

(7)地方恆星時

$$s=s_0+m_ck=s_0+m_c+m_c\times\frac{1}{365.2422};$$

(8)地方民用時

❶ 根據英國航海曆書(Nautical Almanac)。

$$m_c=(s-s_0)k'=(s-s_0)-(s-s_0)\frac{1}{366.2422}。$$

§42. 曆法[1] 在很長的時期內，四季的變化調節着人類的工作；因此，用此變化的周期，卽平均的回歸年來作時間的大單位。根據紐康的研究，在今後一百年內，回歸年等於 $365.2421988-0.0000000614\times\times(t-1900)$ 平太陽日，其中 t 爲年數。回歸年減短得很慢，但不等於說它將永遠這樣；它在幾萬年以後的變化規律還不知道。因回歸年不是平太陽日的整數倍，而曆年當然應該包含整數的日數，所以每一種曆法體系都應當包含 365 日和 366 日的年，後者大約只有前者的三分之一。實際被應用的這種體系有兩種。

一種是由羅馬的獨裁者儒略凱撒 (Julieus Caesar) 頒行的，根據他的名字而稱爲儒略曆(或舊曆)：三年爲 365 日，一年爲 366 日；經過幾次混亂後，到了皇帝奧古斯特 (Augustus) 時才具有了現在的形式。開始的年(卽所謂紀元)各時代不同，在第六世紀，根據羅馬僧侶吉翁尼西的建議，採用所謂"耶穌誕生"那一年；這種紀元到現在還普遍被採用。從羅馬時代就用了現在的把一年內各日分配到十二個月裏去的辦法，也就有了十二個月的名稱。

如所週知，儒略曆中年的平均長度爲 365.25 平太陽日；稱爲儒略年，而 36525 平太陽日稱爲儒略世紀。

儒略曆的不大的誤差 (128 年差一天) 爲普通的紀年所能容忍，但對於宗教的紀年則不能容忍。在 1582 年，教皇格里高里改正了儒略曆的誤差，頒令把十月五日改爲十月十五日，且以後對於世紀年(1600年，1700 年等) 只有當世紀數目能被 4 整除時才算 366 日。此格里曆 (或新曆) 在十六世紀及十七世紀被新教徒所採用。在蘇聯，在 1918 年由政府頒令施行：把二月一日改爲二月十四日。

[1] 關於儒略曆和格里曆的敍述很短，主要在名詞方面，因爲更詳細的說明放在普通天文學或其他專門的書籍裏更恰當一些；參看 Н. И. 易吉耳孫教授 (Проф. Н. И. Идельсон) 著的"曆法史"。

年初第一日各時代不同：例如在1700年以前俄國採用九月一日（據說此爲“創造世界”的日期，根據比章基年表的“計算”，“創造世界”發生於紀元前5808年）；在某些國家則以三月二十五日或十二月二十五日爲年的開始。然而，大家都漸趨向於羅馬時代所採用的一月一日。

儒略曆（不是格里曆）在1582年十月五日以前被普遍使用。

§43. 時間的天文記法 在某些問題中，即使是計算恆星在天球上的位置，都採用準確的平均回歸年，並當太陽黃經達到某固定値時作爲一年的開始；關於這個，熟悉了光行差，歲差和章動後再講比較恰當，參看第十一章。

在天文學中，一般是從1582年十月十五日起採用格里曆，在此以前用儒略曆；然而，必須指出天文學中和日常生活中以及歷史中的時間計算法的區別。

在日常生活中，我們常用序數來計算時間；我們說：第五點5分，一刻，40分；在天文學中相當於：4^h5^m，4^h15^m，4^h40^m；這表示，不是走向某時，而是由公認的起點經過了幾點，幾分，幾秒。完全相似，當天文學家寫道：民用時一月一日4^h5^m或二月五日0^h30^m，這就表示由起點算，一月已過了一日又4^h5^m；或過了整個的一月和二月的五天又0^h30^m；此算法是用量數。由此應當寫作：一月零日2^h24^m或0.1，這個結論是合乎邏輯而且是必然的，因爲開始計算一月的日期是一月0.000；此與上年十二月31.000恆等，因十二月31.000是上年的最後時刻㊀。在此時刻，天文學家認爲新年開始（比常用的早一天）；同樣二月0.0和一月31.0相同，等等。

計算年時也產生同樣的情況。天文記法爲：1943年三月二十二日民用時12時就表示已經過了1943年，一月，二月和三月的22天又12小時。因此，年的起算點不用紀元1年的開始時刻，而用在它之前一年的時刻，記爲0。由此以後的年算正的，而以前的年算負的；在歷史中，

㊀ 此處原有一註，因只談到外國的習慣，故略去。

年的記法就是用序數。為清楚起見，作了圖 28，圖中上面為歷史記法，下面為天文記法。

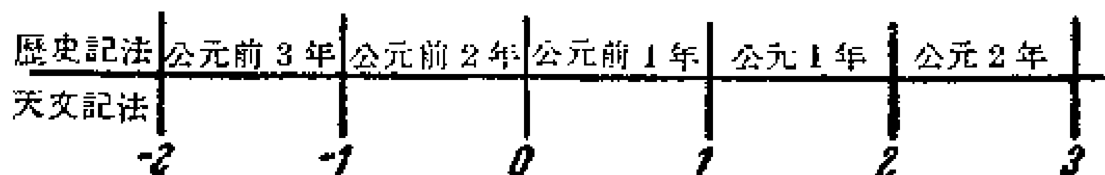


圖　28.

然而，在公元前某年內的月份，在天文中和在歷史中一樣，都由一月開始，天文中的“－2 年三月 14 日”相當於歷史記法的“公元前三年三月 14 日”。

經常需要計算兩日期之間的天數，如下例。由公元前 3 年二月 20 日到公元 4 年三月 2 日經過了多少天？天文上記為：－2 年 2 月 20 日＋4 年 3 月 2 日，相差的年數應為 4－(－2)＝6；但必需知道有多少閏年；閏年是：公元前 1 年和公元後四年，因此在六個各包含 365 日的年之外，還有：3 月 2 日－2 月 20 日＋2＝10＋2＝12 日，而總共為 (6××365＋12) 日。在很長的時期中，計算閏年的數目非常複雜，最好是隨時化到儒略日（參看下節）。

§44. 儒略日.儒略周期　兩個給定日期間的天數問題，用儒略日可以很快地解決。這裏所謂日，是指連續經過了幾年，幾百年，幾千年的日數，第一日為紀元前第 4713 年一月一日，或天文上的 －4712 年一月 1.0 日；並且開始的日和每個儒略日在天文中都認為是由格林尼治平中午起算。

在天文曆書中載有表，給出了到每年一月 0 日或上年十二月 31 日格林尼治平中午有多少儒略日，或到本年的每月 0 日，或甚至到每一日的格林尼治平中午。假如把所考慮的時刻的日，時，分，秒數都表為日的小數，即得當時的儒略日。例如，在曆書中到 1943 年一月 0 日的日數為 2430725，因此，到 1943 年一月一日格林尼治民用時 18^h 時的儒略日為 2430726.25；1943 年一月二十一日莫斯科民用時 $20^h30^m.3$（莫斯

科在東經 $2^h30^m.3$) 時的儒略日爲 2430725+21.25=2430746.25, 等等。

日的儒略算法是在十六世紀提出的。斯卡里格爾 (Scaliger, 萊頓的教授)作了下面的考慮: 在教會紀年裏用了三種周期: (1) 28 年的周期, 一周期後, 每日是星期幾重覆 (此循環中, 每年的年號叫星期數); (2) 19 年的周期, 一周期後, 每日的月相差不多重覆, 卽所謂默冬章, 爲希臘天文學家默冬(Meton)在紀元前第五世紀發現(此周期中每年的年號叫金數); (3) 15 年的周期, 用於羅馬時代的稅收系統中 (此周期中每年的年號叫律會)。斯卡里格爾由當時採用的這三種周期的年號出發,算出最近的一年,此年的一月一日正是三種周期的第一年的一月一日,此年就是爲公元前 4713 年,這樣他就提出公元前 4713 年一月一日(天文上爲 −4712 年一月一日)作爲一個長爲 28×19×15=7980 年的周期的開始,一周期以後的一月一日對於三個周期又都是第一日。這個長周期用他父親的名字儒略(Julius)命名, 稱爲儒略周期,此周期內的日數被稱爲儒略日。

1925 年以前, 天文學家們以平中午作爲任何日期的開始; 從 1925 年起改由民用時平子夜起算,但儒略日還照以前標準,以格林尼治平中午爲開始。

第六章　天空周日轉動的現象

由於地球自轉，在地球上任何地方的觀測者因地球自轉的關係都感覺到，好像整個宇宙繞着一條與地軸平行的所謂天軸在旋轉。因此，我們應當假想，就是我們的數學化的參考材料——天球，也在繞着一條平行於地軸的軸自轉。由此可得，天球上的每個固定點，在一恆星日內畫出了一個小圓，包含它的平面垂直於天軸。然而，在自然界中，這樣的點是沒有的：太陽，月球，行星有在一恆星日內就看得出來的自行，於是因天球自轉而畫出來的曲線就不是閉曲線，這在準確的推理和計算中應該考慮在內。恆星就沒有在一恆星日內看得出來的自行，但它們也與其他的天體一樣，由於大氣折射的影響，使恆星的位置在天球上變化；由於光行差，歲差和章動，而對於較近的天體還有視差的影響；天體位置也有少許變化；在準確推理時需要考慮到這種變化，但在對現象作近似考慮時，可以忽略它們。

在本節中，我們將討論幾種和天空周日轉動有關的問題。

§45．天體中天；中天時的時刻和天頂距　天體經過觀測地的子午圈稱爲天體中天。天球自轉一周時，每一天體都在兩點經過子午圈：一點和天頂比較近，經過它叫上中天，另一點較遠，經過它叫下中天。畫一個簡圖不難證實，在北半球，若 φ 爲當地的地理緯度，δ 爲天體的赤緯，則在上中天時，如果 $\varphi>\delta$，則 $z_в=\varphi-\delta$，卽天體在天頂之南中天，如果 $\delta>\varphi$ 則 $z_в=\delta-\varphi$ 卽天體在天頂之北中天。下中天時 $z_н=$ $=(90^\circ-\varphi)+(90^\circ-\delta)=180^\circ-(\varphi+\delta)$。由於天體周日轉動對子午圈而言的對稱性，故地球周日轉動時，中天時的 $z_в$ 和 $z_н$ 一般說來是天體的天頂距（若 δ 不變）的最小值和最大值。

由所引出的公式或圖可以看出，若 $\delta<90^\circ-\varphi$，則 $z_н>90^\circ$，卽天體下中天時在地平線下；$\delta>90^\circ-\varphi$ 的恆星永不下落。從另一方面，若

$\delta<\varphi-90°$（必須注意，φ 與 δ 本身包含正負號），則 $z_o>90°$，此星甚至在上中天時也在地平線下，也就是說，在地理緯度為 φ 的地方，那些恆星永不上升。

為要由所引出的公式中算出 z_o 和 z_u，除 φ 外，還需要知道天體的赤緯 δ；它隨時都或多或少地變化，若需要的準確度很大，則 δ 在一天內的變化也必須注意。此變化可由天文年曆中所給的數目用內插法求出，但為此目的，需要知道天體中天的時刻。這樣，問題轉到這裏來了。

關於確定天體在給定日期和地點的中天時刻問題，對不同的天體，用不同方法解決。我們先選兩個特款來討論，然後再給出一般的解。

1. 太陽　若時差都取平太陽時減真太陽時，則永遠有平太陽時＝＝真太陽時＋時差 η。當真太陽中心中天時，真太陽時為 0^h 或 12^h，因而平太陽時為 $0^h+\eta$ 或 $12^h+\eta$；因此，要想知道真太陽中天的平太陽時，必須知道平太陽時 $0^h+\eta$ 和 $12^h+\eta$ 時刻的 η 值。在曆書中給出每個格林尼治子夜時的時差，它每天的變化不超過 30^s，或每小時不超過 $1^s.25$。因此，粗略地查年曆可得出近似時差 $\bar{\eta}$，其誤差不超過 $\frac{1}{2}$ 分。設當地對於格林尼治而言的經度為 λ（向東為正）。因此必須算出格林民用時為 $12^h-\lambda+\bar{\eta}$ 時的 η 的準確值，如果討論的是當地的上中天。此準確的 η 值可由年曆中的數字按普通的內插法算出。若時差的意義為（真太陽時－平太陽時），則在上面推理中換 η 為 $-\eta$。

例　求1941年11月2日，莫斯科太陽上中天時的平太陽時和民用時。在天文年曆中對於格林尼治平子夜查得：

	時差	Δ'	Δ''
1941年11月1日	$+16^m19^s.99$		
		$+1^s.70$	
2日	$16^m21^s.69$		$-0^s.79$
		$+0^s.91$	
3日	$16^m22^s.60$		$-0^s.80$
		$+0^s.11$	
4日	$16^m22^s.71$		

其中時差為：真太陽時－平太陽時。

莫斯科的經度是在格林尼治以東 $2^h30^m.3$；$\bar{\eta}=16^m.4$；故必須計算格林尼治民用時爲 $12^h-2^h30^m.3-16^m.4=9^h13^m.3$ 時的 η；內插公式中的 n 值爲 $+\frac{9^h13^m.3}{24^h}=+0.384$；對於白塞耳公式 $\frac{1}{2}n(n-1)=-0.118$；因此眞太陽時－平太陽時 $=+16^m21^s.69+0.384\times$ $\times 0^s.91+0^s.118\times 0^s.80=+16^m22^s.13$。因此求出的太陽上中天的時刻爲 $0^h-16^m22^s.13=$ $=23^h43^m37^s.87$ 莫斯科平太陽時，或莫斯科民用時 $11^h43^m37^s.87$。

2. 恆星　在曆書中，除拱極星外，給出了恆星每第十次在格林尼治上中天時的坐標。

必須考慮到，如果在某些日子裏，恆星的 α 是已知的，則對於其中的每一天，α 就等於此星在格林尼治上中天時的恆星時；爲了求出它在格林尼治上中天時的時刻；只須由天文年曆中已給出其 α 的那些日期用內插法求出在給定的那天的 α；用線性內插法差不多總是夠了；但若 α 要準確到 $0^s.001$；n 大於 0.1 時；還必須用二次差。

若需要對於在格林尼治以東，經度爲 λ 的地方解此問題，則不難看出，必須對當天(或前一天)格林尼治恆星時爲$(\alpha-\lambda)$時內插出 α；因此，內插法中的係數 n' 將爲 $n-\lambda$，其中 λ 爲以十天爲單位的小數。

例　小熊座 η 星在格林尼治上中天。

	α	Δ'	Δ''
1941 年三月 22.1 日	$13^h45^m14^s.809$		
		$+0^s.163$	
1941 年四月 1.0 日	$14^s.972$		$-0^s.058$
		$+0^s.105$	
1941 年四月 11.0 日	$15^s.077$		$-0^s.056$
		$+0^s.049$	
1941 年四月 20.9 日	$15^s.126$		$-0^s.052$
		$-0^s.003$	
1941 年四月 30.9 日	$15^s.123$		$-0^s.049$
		$-0^s.052$	
1941 年五月 10.9 日	$15^s.071$		

需要求出它四月 6 日在莫斯科 ($\lambda=2^h30^m.3$ 東經) 上中天時的恆星時。取四月 1 日爲標準日期，故 $n'=\frac{5-\frac{2.5}{24}}{10}=0.49$；$\frac{1}{2}n'(n'-1)=-0.125$；所求的 $\alpha=13^h45^m14^s.972+0.49\times$ $\times 0^s.105+\frac{1}{8}\times 0^s.057=13^h45^m15^s.031$。

然而，此時必須考慮到，一年內有一天，在給定地點此恆星有兩次上中天：一次在子夜後不久(小於 4 分鐘)，第二次在下一個子夜之前不久(小於 4 分鐘)。顯然的，這是因爲恆星兩次上中天的間隔是一個恆星日，即比日曆上的日要短 4 分鐘。在有兩次上中天的這一天以前，恆星上中天是在子夜以後，即民用日開始後不久，並且每天早 4 分鐘，於是有連續兩個子夜的恆星時和此恆星的赤經相近，即兩次上中天的那天必然要到來。那天以後，每天的唯一的上中天是在子夜以前，並且以後每天早 4 分鐘。

此臨界日對於每個恆星都在曆書中載出；對於小熊座 η 星，應在引用的表中注意到：除四月 11 日和四月 20 日外，都是相隔 10 天；在那兩天之間爲 9 天，但還與其他間隔一樣包含 10 次上中天；此臨界日就在四月 18 日。四月 11 日以後的第七，第八次上中天落在此日，第九次在四月 19 日末，第十次在四月 20 日末。這是在左面那行中，中天時刻的日期小數所指出來的。因此，在計算臨界日的中天時刻時，必須很好地判定，我們所要的是第一次中天(在此爲從四月 17 日到 18 日的晚上)，還是第二次中天(在此爲從 18 日到 19 日的晚上)，換句話說，我們所要求的是在標準日期以後的第幾次上中天；在我們的例子中，是要四月 11 日以後的第七次，在從 17 日到 18 日的晚上，或者要第八次，在從 18 日到 19 日的晚上。當所要求的是那一個的問題弄清楚了以後，內插法就根據所指出的規則進行。

例　求小熊座 η 星四月 18 日在莫斯科兩次上中天時的恆星時，即求此星的赤經 α。第一次爲：$n=$四月 18－四月 11＝7；$n'=\frac{7-0.1}{10}=0.69$；$\frac{1}{2}n'(n'-1)=-0.107$；因此

$$\alpha=13^h45^m15^s.077+0.69\times0^s.049+0.107\times0^s.054=13^h45^m15^s.117。$$

第二次爲：$n=$四月 18－四月 11＋1＝8，$n'=0.79$；$\frac{1}{2}n'(n'-1)=-0.083$，因此

$$\alpha=13^h45^m15^s.077+0.79\times0^s.049+0.083\times0^s.051=13^h45^m15^s.120。$$

若要計算下中天時刻，可用同樣的推理和計算的法則，又必須判斷所要求是甚麼，即根據計算，所要求的下中天，緊跟着曆書標準日以後的哪一次上中天。對於下中天，每個恆星也有它的臨界日，就是當此恆

是在日曆上同一天中發生兩次下中天的那一天，但在此情形判斷比較簡單，因曆書上給出恆星在此臨界日前後各一月內白天上中天時的坐標，這表示，我們只需要判斷對於在開始的日期以後的那一夜需要計算恆星的 α。

例　求莫斯科1941年11月4日到5日的晚上小熊座 η 星下中天時刻。由天文年曆知：在格林尼治上中天的 α 爲：

	α	Δ'	Δ''
1941年10月 7.5日	$13^h45^m12^s.259$		
		-0.023	
1941年10月17.5日	$12^s.236$		$+0.060$
		$+0.037$	
1941年10月27.5日	$12^s.273$		$+0.065$
		$+0.102$	
1941年11月 6.4日	$12^s.375$		$+0.065$
		$+0.167$	
1941年11月16.4日	$12^s.542$		

由11月6日出發，向上內插；則 $n=1.5$；$n'=\frac{1.5+0.1}{10}=0.16$；$\frac{1}{2}n'^2=0.0128$，而 $\alpha=$ $=13^h45^m12^s.375-0.16\times0.1345+0.0128\times0.065=13^h45^m12^s.354$。

3．月球和行星；一般情形的解法　若有了天文年曆，要計算月球或大行星中天的時刻是很簡單的，因在天文年曆中給出了這些天體在格林尼治上中天的時刻，而對於月球還給出了下中天時刻。這就是說，只需要對所給的經度進行內插；時刻給到 $0^m.1$，用線性內插法或二次差就夠了。對於月球，一月中有一天沒有上中天，有一天沒有下中天。對於行星也有類似情形。其原因讀者已知道了，或者考慮一下爲什麼會發生與何時發生。

然而，在月球運動表中，並沒有給出月球在格林尼治上中天的時刻，它可由坐標 α 及其時變求出。因此可以討論一下這個問題的一般情形。

當天體經過子午圈時，若爲上中天，則其赤經等於恆星時，下中天時和恆星時相差 12^h。爲要算出這在所給的日期的甚麼時候發生，必需知道當時的地方民用時 m_c，天體赤經 α 和地方恆星時 s，並且還要知道它們的時變。這些都在天文曆書中載出。若 λ 爲東經，當天格林尼治子

夜的恆星時為 S_0，則對於地方時為 m_c 的恆星時為(參看§39)

$$s=S_0+\lambda+\frac{m_c-\lambda}{24}24^h3^m56^s.555。$$

從另一方面，若對同一格林尼治子夜，天體赤經為 α_0，而 Δ^I 和 Δ^{II} 為對應於一平太陽日的一次差和二次差，則根據內插法的規則，對同一時刻 m_c 有：格林尼治民用時為 $m_c-\lambda$，並且若記 $\frac{m_c-\lambda}{24}$ 為 n，則根據白塞耳公式：

$$\alpha=\alpha_0+n\Delta^I_{1/2}+\frac{1}{2}n(n-1)\Delta^{II}_{1/2}。$$

則對於上中天時刻

$$S_0+\lambda+n\times24^h3^m56^s.555=\alpha_0+n\Delta^I_{1/2}+\frac{1}{2}n(n-1)\Delta^{II}_{1/2},$$

而對於下中天時刻：

$$S_0+\lambda+n'\times24^h3^m56^s.555=\pm12^h+\alpha_0+n'\Delta^I_{1/2}+\frac{1}{2}n'(n'-1)\Delta^{II}_{1/2}。$$

若用斯特林公式，則右端為：

$$\alpha_0+n\Delta^I_0+\frac{1}{2}n^2\Delta^{II}_0。$$

若 $\Delta''_{1/2}$ 不大，則計算 n 和 n' 一般不需解二次方程，而用下法。

由第一個方程式有：

$$n=\frac{\alpha_0-S_0-\lambda}{24^h3^m56^s.555-\Delta'_{1/2}-\frac{1}{2}(n-1)\Delta''_{1/2}}。$$

首先由下列等式求出近似值 $\bar{n}$

$$\bar{n}=\frac{\alpha_0-S_0-\lambda}{24^h3^m56^s.555-\Delta'_{1/2}}$$

然後就由下列等式求出更準確的值

$$n=\frac{\alpha_0-S_0-\lambda}{24^h3^m56^s.555-\Delta'_{1/2}-\frac{1}{2}(\bar{n}-1)\Delta''_{1/2}}。$$

在天文年曆中載有表，可用來化以日爲單位的 n 爲時、分、秒。用相似的方法，可由對應的方程式求出下中天的 n' 值。顯然的，若列出的月球坐標的時間間隔比一天更短，例如在格林尼治民用時的 0^h 和 12^h，則 n 的單位不是日，而是半日，即 12^h。此外，若想以小時爲單位表出 m_{c}，則最初的方程式對於上中天應寫爲（斯特林公式）：

$$S_0+\lambda+x\times 60^m9^s.856=\alpha_0+\frac{x}{12}\Delta_0^{\mathrm{I}}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{12}\right)^2\Delta_0^{\mathrm{II}}。$$

在這裏 $x=m_{\text{c}}-\lambda$，以平太陽時爲單位。

例 求 1941 年 9 月 5 日在依爾庫次克（東經 $6^h57^m22^s.9$）月球上中天和下中天的時刻。

天文年曆給出：

世界時		α	Δ'		格林尼治恆星時
1941 年 9 月 4 日	0^h	$21^h26^m57^s.1$			$22^h50^m53^s.2$
			$+25^m59^s.2$		
1941 年 9 月 4 日	12^h	$21^h52^m56^s.3$		$-30^s.1$	$10^h52^m51^s.5$
			$25^m29^s.1$		
1941 年 9 月 5 日	0^h	$22^h18^m25^s.4$		$-28^s.1$	$22^h54^m49^s.7$
			$25^m\ 1^s.0$		
1941 年 9 月 5 日	12^h	$22^h43^m26^s.4$		$-25^s.3$	$10^h56^m48^s.0$
			$24^m35^s.7$		
1941 年 9 月 6 日	0^h	$23^h08^m02^s.1$			$22^h58^m46^s.3$

注意，世界時 9 月 5 日 12^h 時，α 接近於 23^h，而在依爾庫次克的恆星時差不多爲 11^h+7^h，即 18^h，因此我們可得出結論，在依爾庫次克上中天差不多發生於世界時 17^h，因而在計算上中天時取 9 月 5 日 12^h 爲起點，而下中天則取 9 月 5 日 0^h。對於下中天有

$$22^h54^m49^s.7+6^h57^m22^s.9+x(60^m9^s.865)=$$

$$=22^h18^m25^s.4+\frac{x}{12}25^m15^s.0-\frac{x^2}{2\times 144}28^s.1+12^h。$$

由此
$$x\times 58^m3^s.6+x^2\times 0^s.10=4^h26^m12^s.8。$$

又：
$$x=\frac{266^m.21}{58^m.060+x\times 0^m.002};\quad x=4^h.585;\ x=4^h.584=4^h35^m.0。$$

所以在依爾庫次克下中天爲世界時 9 月 5 日 $4^h35^m.0$ 或依爾庫次克民用時 $11^h32^m.4$。

對於上中天：

$$10^h56^m48^s.0+6^h57^m22^s.9+x(60^m9^s.856)=$$

$$=22^h43^m26^s.4+\frac{x}{12}24^m48^s.35-\frac{x^2}{2\times 144}25^s.3,$$

$$x(58^m5^s.83)+x^2(0^s.088)=4^h49^m15^s.5,$$

$$x=\frac{289.26}{58.097+x(0.0015)};\ x=4^h.979=4^h58^m.7。$$

所以上中天爲依爾庫次克民用時 9 月 5 日 $23^h56^m.1$。

§**46. 天體的出沒；晨昏蒙影** 天體出沒時在地平上，所以 $z=90°$，因而公式

$$\cos z=\sin\varphi\sin\delta+\cos\varphi\cos\delta\cos t,$$

簡化爲：

$$0=\sin\varphi\sin\delta+\cos\varphi\cos\delta\cos t,$$

對於出沒時刻得：

$$\cos t=-\tan\varphi\tan\delta,$$

由是得

$$\frac{1-\cos t}{1+\cos t}=\tan^2\frac{t}{2}=\frac{\cos(\varphi-\delta)}{\cos(\varphi+\delta)}。$$

由此方程式，每次給出兩個 t 的值：一個，t_w，在 0° 和 180° 之間，另一個，t_e，在 180° 和 360° 之間；第一個爲天體下落時的時角，第二個爲上升時的時角。若 α_e 表示上升時的赤經，而 α_w 爲下落時的赤經，則上升時，恆星時 $s_e=\alpha_e+t_e$，而下落時爲 $s_w=\alpha_w+t_w$。

然後，按照普通的規則，這些恆星時可化爲平太陽時和民用時。

若天體在一天內的坐標有顯著變化，例如月球，則計算 t_e 必須用月球上升時的赤緯，而計算 t_w 必須用下落時的赤緯；因此，必須先算出赤緯的近似值，因爲 s_e, s_w 預先不知道，然後再由近似的 s_e, s_w 計算 δ_e, δ_w，就得到更準確的 t_e, s_e 和 t_w, s_w。對於恆星，這個就不必要，而對於太陽和行星，相應的誤差可以忽略，若 $\delta<0$，即 $\cos t>0$，取中午的赤緯（對應於行星上中天時刻），若 $\delta>0$，即 $\cos t<0$，則取子夜時的赤緯（對應於行星下中天）。

除此之外，在太陽的情形不必要計算它的赤經，而可以更簡單地得到。若 η 爲時差，即 $\eta=$ 眞太陽時－平太陽時，則 $12^h-\eta$ 爲眞中午的民用時，因此，太陽上升時的民用時爲 $12^h-\eta+t_e$，下落時爲 $12^h-\eta+t_w$。

然而在此尚未考慮到大氣折射，在地平上，大氣折射爲 35′，而隨溫度變化於 31′($t=30°$C) 和 45′($t=-30°$C) 之間；因爲不能預先知道大

氣折射，故總是採用 35′。大氣折射使天體升高了，因此看到天體上升下落時，$z=90°35'$。這樣一來，計算 t_e, t_w 的公式成爲：

$$\cos t=\frac{\cos 90°35'-\sin\varphi\sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta}=\frac{-0.0102-\sin\varphi\sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta}。$$

除此之外，對於太陽，它的上升和下落時刻是認爲上邊緣在地平上的時候；故中心的天頂距爲 $90°+R$，其中 R 爲太陽的角半徑。因此，同時考慮到折射和半徑，我們有：

$$\cos t=\frac{\cos(90°+35'+R)-\sin\varphi\sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta}。$$

因爲 R 每年只變化 $\pm\frac{1'}{4}$，故總可以取平均值 $R=16'$，於是：

$$\cos t=\frac{\cos 90°51'-\sin\varphi\sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta}=\frac{-0.0148-\sin\varphi\sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta}。$$

對於月球，半徑的影響常作相似地計算。然而(讀者想一下)，若月球在白天上升或下落時，在中緯度地方看來，月球上邊緣是亮的，因此，月球的上升和下落都看不見；若月球在晚上上升和下落，則除望日附近外，上邊緣爲暗的，因此還是看不見上升和下落。這樣一來，半徑的影響不必要算得很準確。在北極的半年爲黑夜的冬季，計算月球半徑的影響才有意義。總是取 $R_{☽}$ 等於 15′—16′ 就夠了。

最後，月球的地平視差對上升和下落的時刻有很大影響。由於視差(圖 29)，月球中心在地面的上升下落時的地心天頂距比 90° 小，其差爲月球的地平視差值；而在曆書中的月球坐標爲地心坐標。因此，由於視差，在月球的公式中，必須要以 $90°-p$ 代換 90°。視差 p 在一月內變化於 54′—60′ 之間，總是取 $p=57'$ 就夠準確了。因此，對於月球，把折

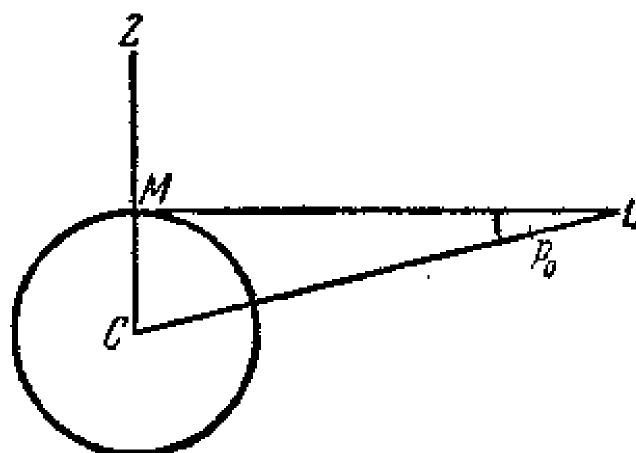


圖　29.

射 ρ，半徑 R，視差 p 都算在內的公式如下：

$$\cos t=\frac{\cos(90^\circ+\rho+R-p)-\sin\varphi\sin\delta_☉}{\cos\varphi\cos\delta_☉}=\frac{\cos 89^\circ 53'-\sin\varphi\sin\delta_☉}{\cos\varphi\cos\delta_☉},$$

在後一式中取得的是 ρ，R，p 的平均值。太陽的地平視差爲 $8''.8$，因此沒有根據來考慮它的影響。

天體上升和下落時的地平經度可由天文三角形很簡單地得到。不難看出，若不計算折射，半徑和視差，由天文三角形得

$$\cos(90^\circ-\delta)=\cos 90^\circ\cos(90^\circ-\varphi)+\sin 90^\circ\sin(90^\circ-\varphi)\cos(180^\circ-A),$$

由此 $$\cos A=-\frac{\sin\delta}{\cos\varphi}。$$

從另一方面： $$\frac{\sin(180^\circ-A)}{\sin t}=\frac{\sin(90^\circ-\delta)}{\sin 90^\circ},$$

由此 $\sin A=\cos\delta\sin t$，其中 $\cos t=-\tan\varphi\tan\delta$

並且由相當的圖可看出 A，t 位於同一象限。

若考慮到折射，半徑和視差（或其中的一或兩個），則得：

$$\sin A=\frac{\cos\delta\sin t}{\sin(90^\circ+\rho+R-p)},$$

t 用包含 ρ，R，p 的公式計算。

嚴格地說，此時，不應取中心，而是取在觀測地看到的上邊緣的那點的 δ 來算；但那樣的準確度有時不必要。最後注意，由於不知道準確的大氣折射，不可能計算天體上升和下落時刻準確到 $0^m.1$；因此，總是把準確度限於 1^m，而用四位對數計算。

地平俯角　在上面的一切推理中，觀測地點都假定在地球橢球體的表面上，或在相差不多的大地水準面（一般說來在海面上）上。若觀測者在陸地上，海船上，特別是在飛機上，在表面上高度爲 h 米的地方，則視地平，卽此情形中看起來天空和地球相連接的線，並不在和觀測的鉛垂線垂直的平面上；視地平在地平面下面，由觀測者引向視地平上某點的直線到天頂的角度等於 90° + 地平俯角。若取地球爲球形（在實

用上已夠了)，地平俯角記爲 Δz，觀測者到地平的距離 MD 記爲 d（和地平的距離)，地球半徑記爲 R，則由圖 30 可看出，在地心的角度 DCM 等於地平俯角 $HMD=\Delta z$ 並且

$$\cos \Delta z=\frac{R}{R+h},$$

$$d=R\tan \Delta z,$$

$$d^2=(R+h)^2-R^2。$$

用這些公式不難得出近似的，但實用上已夠準確的值：

$$\Delta z=3438'\sqrt{\frac{2h}{R}},\quad d=\sqrt{2Rh}。$$

若取 $R=6371000\ m$ 而 h 用米爲單位，則

$$\Delta z=1'.926\sqrt{h},\quad d=3570\sqrt{h}\ m,$$

若 h 以公里爲單位，則

$$\Delta z=60'.91\sqrt{h},\quad d=112.88\sqrt{h}\ \text{公里}。$$

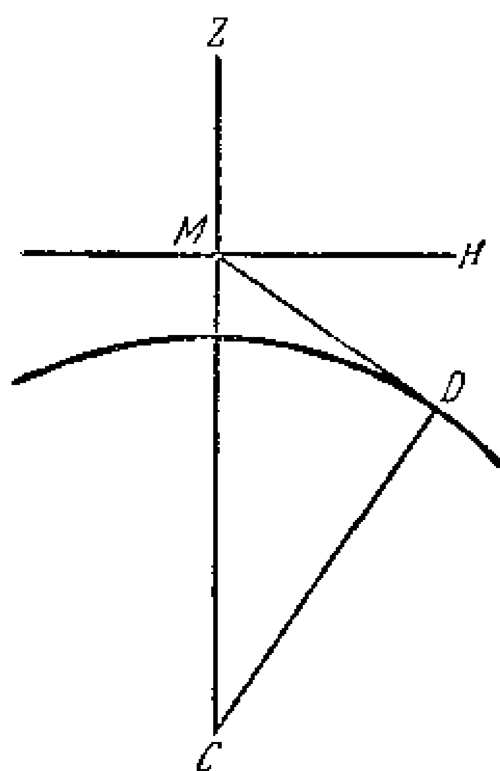


圖 30.

和觀測者的高度對應的角度 Δz，必須加於每個天體上升下落時的天頂距。因此，例如太陽上邊緣上升或下落時的時角由下列公式算出：

$$\cos t_0=\frac{\cos(90°51'+\Delta z)-\sin\varphi\sin\delta_\odot}{\cos\varphi\cos\delta_\odot}。$$

較差　用微分公式對大氣折射，半徑，視差和地平俯角的影響的計算，可以代替用準確公式的計算。由基本公式易得：$\frac{dt}{dz}=\frac{\sin z}{\cos\varphi\cos\delta\sin t}$，對於上升下落時 $\frac{dt}{dz}=\frac{1}{\cos\varphi\cos\delta\sin t}$，因此到第一次近似 $\Delta t'=$ $=\frac{\Delta z'}{\cos\varphi\cos\delta\sin t'}$，其中 t' 由公式 $\cos t'=-\tan\varphi\tan\delta$ 或 $\tan^2\frac{1}{2}t'=$ $=\frac{\cos(\varphi-\delta)}{\cos(\varphi+\delta)}$ 算出。

則 $$t=t'+\Delta t'=t'+\frac{\Delta z'}{\cos\varphi\cos\delta\sin t'},$$

其中 $\Delta z'$ = 大氣折射 − 視差 + 半徑 + 地平俯角。然而，若 t' 接近於 $0°$ 或 $180°$ 時，這種方法不能用，因 t' 很接近於 $0°$，$180°$ 時，$\frac{dt}{dz}\to\infty$。

晨昏矇影　太陽由下落到它的天頂距爲 97°（有時用 96°）這段時間叫昏影；早晨太陽由天頂距爲 97° 到上升這段時間叫晨光。由此可見，太陽在晨光始和昏影終時刻的時角 t，可由下列方程式得出：

$$\cos t=\frac{\cos 97°-\sin\varphi\sin\delta_\odot}{\cos\varphi\cos\delta_\odot}=\frac{-0.1219-\sin\varphi\sin\delta_\odot}{\cos\varphi\cos\delta_\odot},$$

而晨光始和昏影終的格林尼治民用時可由下列公式得到：

$$12^h-\eta-t \text{ 和 } 12^h-\eta+t,$$

若 $$0°<t<180°。$$

到昏影終時，晚霞幾乎消失，但天空還沒有完全黑；要一直繼續到太陽降到地平線下 18° 時才黑；此時刻稱爲天文昏影終；早晨朝霞出現以前對應的時刻叫天文晨光始。顯然，此時的太陽時角用下式表示：

$$\cos t=\frac{\cos 108°-\sin\varphi\sin\delta_\odot}{\cos\varphi\cos\delta_\odot}=\frac{-0.3090-\sin\varphi\sin\delta_\odot}{\cos\varphi\cos\delta_\odot}。$$

在討論地上某地太陽和其他天體的上升下落，以及晨昏矇影時，特別在整個地球上，下面的幾何考慮很有用：設太陽赤緯爲 $\delta_\odot$；設地面上有一 C 點，在該處太陽於此時係在天底，即 $\varphi=-\delta_\odot$；若不算太陽的大氣折射，半徑和視差，則白天和黑夜的分界線爲一大圓，C 爲其極；若算太陽的大氣折射 ρ 和半徑 $R_\odot$，則恰好在太陽上升或下落時看到太陽上邊緣的地區界限是以 C 爲中心，以 $90°-\rho-R_\odot$ 爲球面角半徑的小圓；完全黑暗的邊界是以 C 爲中心，以 83° 爲球面角半徑的小圓。若這些圓在地面上看得很清楚，則不難解決類似下面的問題：若太陽的赤緯已知，問在哪些平行圈上黑夜最長，即由太陽的邊緣下落到上升所需的時間（算入折射和半徑）；試研究當太陽赤緯作周年變化時的問題。

§47. 天體通過卯酉圈　卯酉圈是垂直於子午圈的地平經圈，通過東西兩點。由幾何討論，顯然在天球周日自轉時，$\delta<\varphi$ 的天體的周日

平行圈必然要和它相交；$\delta>\varphi$ 的天體的周日平行圈，整個在卯酉圈以北；下面又對地上北半球作進一步的敍述；在南半球所見的現象請讀者自己考慮。

當天體通過卯酉圈時，天文三角形成了直角三角形，因地平經度 $A=90°$ 或 $270°$。因此

$$\tan(90°-\varphi)=\tan(90°-\delta)\cos t,$$

由此
$$\cos t=\frac{\tan\delta}{\tan\varphi} \quad 和 \quad \tan^2\frac{1}{2}t=\frac{\sin(\varphi-\delta)}{\sin(\varphi+\delta)}。$$

由此公式可得 t 的兩個值，一爲 t_w，在 $0°$ 和 $180°$ 之間，對應於天體經過卯酉圈西部的時刻，另一個爲 t_e，在 $180°$ 和 $360°$ 之間，對應於天體經過卯酉圈東部的時刻。因此，對應的地方恆星時爲：$s_w=\alpha+t_w$，$s_e=\alpha+t_e$。

天體經過卯酉圈時的天頂距由下式可得：

$$\sin z=\cos\delta\sin t_w=\cos\delta\sin(360°-t_e);$$

$$\cos z=\frac{\sin\delta}{\sin\varphi};\ \tan^2\frac{1}{2}z=\tan\frac{1}{2}(\varphi-\delta)\cot\frac{1}{2}(\varphi+\delta)。$$

本節和下節的所有公式，都很容易由直角三角形公式推出（參看 § 10），所以只給出而不解釋。

§48. 天體大距　由幾何討論，顯然（畫一適當的圖）周日旋轉時不和卯酉圈相交的拱極星的地平經度，在某範圍內變化，向東和向西達到某個極大值。當拱極星的地平經度爲極大或極小時，就說它位於東大距或西大距。

必須考慮，在大距時，地平經圈和周日平行圈相切；因此天文三角形爲直角三角形，直角在恆星那裏。因此在大距離時：

$$\tan(90°-\delta)=\cos t\tan(90°-\varphi),$$

由此
$$\cos t=\frac{\tan\varphi}{\tan\delta}$$

以及
$$\tan^2\frac{1}{2}t=\frac{\sin(\delta-\varphi)}{\sin(\delta+\varphi)}。$$

由此公式得到 t 的兩個值，一爲 t_e，在 180° 和 360° 之間，對應於東大距；其恆星時爲 $s_e=t_e+\alpha$；另一爲 t_w，在 0° 和 180° 之間，對應於西大距；其恆星時爲 $s_w=t_w+\alpha$ 。

大距時的天體的天頂距可由下式定出：

$$\sin z=\cos\varphi\sin t_w=\cos\varphi\sin(360°-t_e),$$

或由
$$\cos z=\frac{\sin\varphi}{\sin\delta},\ \tan^2\frac{1}{2}z=\tan\frac{1}{2}(\delta-\varphi)\cot\frac{1}{2}(\delta+\varphi),$$

地平經度由下式得出：

$$\sin A_w=\frac{\cos\delta}{\cos\varphi}\quad(A_w\text{ 在第二象限內}),$$

$$\sin A_e=-\frac{\cos\delta}{\cos\varphi}\ (A_e\text{ 在第三象限內})。$$

§49. 坐標變率；它們的微小變化間的關係　爲了推出 z 和 A 隨時間的變率，最簡單是用 z，A 都在餘弦符號內的公式，卽

$$\cos z=\sin\varphi\sin\delta+\cos\varphi\cos\delta\cos(s-\alpha),\qquad s-\alpha=t,$$
$$\sin\delta=\sin\varphi\cos z-\cos\varphi\sin z\cos A。$$

爲了變換，我們還需要下面的公式：

$$\cos\delta\sin t=\sin z\sin A,$$
$$\sin z\cos q=\sin\varphi\cos\delta-\cos\varphi\sin\delta\cos(s-\alpha),$$
$$\cos\delta\cos q=\sin\varphi\sin z+\cos\varphi\cos z\cos A。$$

對於恆星，α 和 δ 在一天內沒有顯著變化，因此 z 和 A 對時角 t 的導數等於對恆星時 s 的導數，卽 z，A 的變率。

微分第一式得：

$$\frac{dz}{ds}=\frac{dz}{dt}=\frac{\cos\varphi\cos\delta\sin t}{\sin z}.$$

或因
$$\cos\delta\sin t=\sin z\sin A,$$

故
$$\frac{dz}{ds}=\cos\varphi\sin A。$$

對於 α 和 δ 在一天內的變化不能忽略的天體(太陽,月球,行星)有:

$$-\sin z\frac{dz}{ds}=\sin\varphi\cos\delta\frac{d\delta}{ds}-\cos\varphi\sin\delta\cos t\frac{d\delta}{ds}-\cos\varphi\cos\delta\sin t\left(1-\frac{d\alpha}{ds}\right)=$$

$$=\sin z\cos q\frac{d\delta}{ds}-\cos\varphi\cos\delta\sin t\left(1-\frac{d\alpha}{ds}\right),$$

由此
$$\frac{dz}{ds}=\cos\varphi\sin A\left(1-\frac{d\alpha}{ds}\right)-\cos q\frac{d\delta}{ds}。$$

由包含 $\cos A$ 的公式,對於恆星有:

$$0=-\sin\varphi\sin z\frac{dz}{ds}-\cos\varphi\cos z\cos A\frac{dz}{ds}+\cos\varphi\sin z\sin A\frac{dA}{ds},$$

$$\frac{dA}{ds}=\frac{\cos\delta\cos q}{\cos\varphi\sin z\sin A}\frac{dz}{ds}=\frac{\cos\delta\cos q}{\sin z}=\sin\varphi+\cos\varphi\cot z\cos A。$$

若需要考慮 $\frac{d\alpha}{dt}$ 和 $\frac{d\delta}{dt}$,則

$$\cos\delta\frac{d\delta}{ds}=-\cos\delta\cos q\frac{dz}{ds}+\cos\varphi\sin z\sin A\frac{dA}{ds}。$$

由此
$$\frac{dA}{ds}=\frac{\cos\delta\cos q}{\cos\varphi\sin z\sin A}\left[\cos\varphi\sin A\left(1-\frac{d\alpha}{ds}\right)-\cos q\frac{d\delta}{ds}\right]+$$

$$+\frac{\cos\delta}{\cos\varphi\sin z\sin A}\frac{d\delta}{ds}=\frac{\cos\delta\cos q}{\sin z}\left(1-\frac{d\alpha}{ds}\right)+$$

$$+\frac{\cos\delta\sin^2 q}{\cos\varphi\sin z\sin A}\frac{d\delta}{ds}=\frac{\cos\delta\cos q}{\sin z}\left(1-\frac{d\alpha}{ds}\right)+\frac{\sin q}{\sin z}\frac{d\delta}{ds}。$$

自然,在這些公式中,所有的角度,或以弧度爲單位,或以角秒(分)爲單位;若想要以角度秒爲 z 和 A 的單位,而 s 以時秒爲單位,則公式轉化如下:

$$\frac{dz''}{ds^s}=15''\cos\varphi\sin A$$ 以恆星時的秒爲單位,

$$\frac{dA''}{ds^s}=15''\frac{\cos\delta\cos q}{\sin z}$$ 以恆星時的秒爲單位等等。

有時必須解決類似下面的問題：在經度爲 λ，緯度爲 φ 的地方，某時刻天體的地平經度爲 A，天頂距爲 z；問同時，同一恆星在經度爲 $\lambda+\Delta\lambda$，緯度爲 $\varphi+\Delta\varphi$ 的地方的地平經度和天頂距與 z 和 A 相差多少；$\Delta\lambda$ 認爲向東爲正；要求解準確到 $\Delta\varphi$，$\Delta\lambda$ 的一次冪。我們用幾何討論來解此問題，有時比微分法快些，並且總是要清楚些。

若緯度爲 $\varphi+\Delta\varphi$，則表示天頂向北偏了 $\Delta\varphi$（如圖 31）。由此，卯酉圈以南的天體的 z 增大了，以北的則減小了；$\Delta z=\Sigma Z'-\Sigma Z$。把天球上 Z 那塊作爲平面，則 $\Delta z=\Delta\varphi\cos A$。若 $SH'H$ 爲地平，則地平經度差 $\Delta A=-SH'-SH$；記小角度 $Z\Sigma Z'$ 爲 σ'，由三角形 $Z\Sigma Z'$ 得

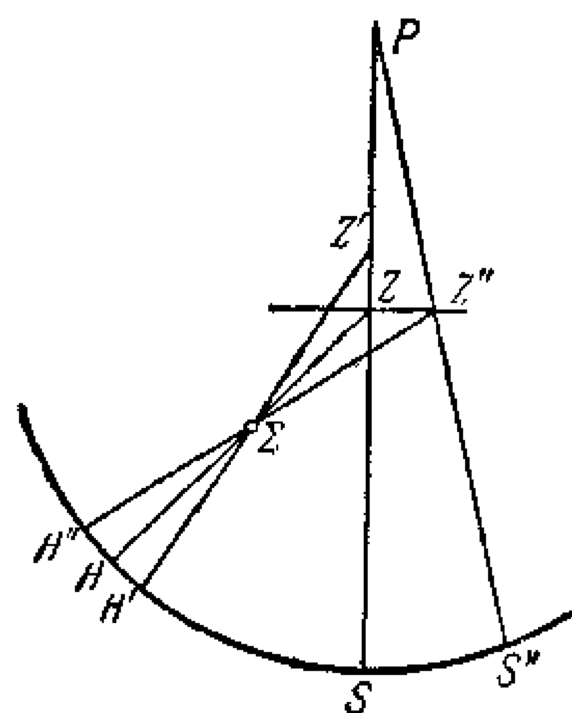


圖 31.

$$ZZ'\sin A=\sigma'\sin z,$$

而由三角形 $\Sigma HH'$：

$$HH'=-\Delta A=\sigma'\sin\Sigma H=\sigma'\cos z;$$

因此 $\sigma'=\frac{\Delta\varphi\sin A}{\sin z}=-\frac{\Delta A}{\cos z}$；

由此 $\Delta A=-\Delta\varphi\cot z\sin A$。

若 $\Delta\lambda$ 爲正，則第二個地方的天頂由第一個的向東移了大圓弧 $\Delta\lambda\cos\varphi$（在圖上的 Z'' 點）；在此子午圈以西的天體的天頂距比以前增大，而以東的則減小；

$$\Delta z=\Delta\lambda\cos\varphi\sin A。$$

由於地平圈變化，地平經度的變化 ΔA 爲 $SH''-SH=HH''$；和前面的推理相似，記小角度 $Z\Sigma Z''$ 爲 σ''，由三角形 $ZZ''\Sigma$：

$$ZZ''\cos A=\sigma''\sin z,\quad HH''=\sigma''\cos z,$$

由是 $$\sigma''=\frac{\Delta\lambda\cos\varphi\cos A}{\sin z}=\frac{HH''}{\cos z},$$

由此得 $$HH''=\Delta\lambda\cos\varphi\cot z\cos A。$$

對於此問題必須加上南點的變化，即 $SS''=\Delta\lambda\sin\varphi$。因此

$$\Delta A=SS''+HH''=\Delta\lambda\frac{\sin\varphi\sin z+\cos\varphi\cos z\cos A}{\sin z}=\Delta\lambda\frac{\cos\delta\cos q}{\sin z}。$$

λ 的變量 $\Delta\lambda$ 相當於 t 的變量 Δt。

試用類似的方法求出，(1)兩個天體，其赤經差爲 $\Delta\alpha$，赤緯差爲 $\Delta\delta$，在同時同地的天頂距差和地平經度差爲：

$$\Delta z=-\Delta\alpha\cos\delta\sin q-\Delta\delta\cos q;$$

$$\Delta A\sin z=-\Delta\alpha\cos\delta\cos q+\Delta\delta\sin q,$$

其中 q 爲星位角(在東半天球 $180°<q<360°$，在西半天球 $0°<q<180°$)，

(2)若由於天球自轉，天頂距變化 Δz，則時角變化 $\Delta t=\Delta z\sec\delta\times\times\csc q$。

(3)若在同一地平經圈的二天體，其天頂距差爲 Δz，則時角差爲 $\Delta z\sin q\sec\delta$。

(4)將在本節開始用分析方法推導出來的公式，用幾何方法推導出來。

§ 50. **關於天球周日轉動的兩個問題** 實際上遇到的問題要比前面所討論的複雜，其他的問題爲解決和研究方便起見，需要特殊的途徑和方法。現在討論兩個問題作例子。

1．給了兩恆星 $S_1(\alpha_1,\delta_1)$，$S_2(\alpha_2,\delta_2)$；對於緯度爲 φ 的地方，求此二星的天頂距相等時的地方恆星時。此問題爲辛格確定鐘表誤差和別夫錯夫確定地理緯度的基礎。

在寫出公式以前，先擬出解此問題的幾何途徑是很有用的（爲完全清楚起見，差不多是必要的）。假定(圖 32)天球的大圓 MN 通過大圓弧 S_1S_2 的中點 M，並垂直於 S_1S_2；把 MN 當作天球上距 S_1，S_2 等遠的點的軌跡，於是 $NS_1=NS_2$；另外，再假定赤緯等於 φ 的周日平行圈，即某地天頂在地球自轉時描出的周日平行圈（記住：天頂的赤緯等於當地的地理緯度）；上面所提出的 M 的大圓可能和此平行圈交於兩點，並且每一點都表示當 S_1，S_2 兩星天頂距相等時天頂的位置；因此，N_1，N_2 的赤經等於當時的恆星時（記住：天頂的

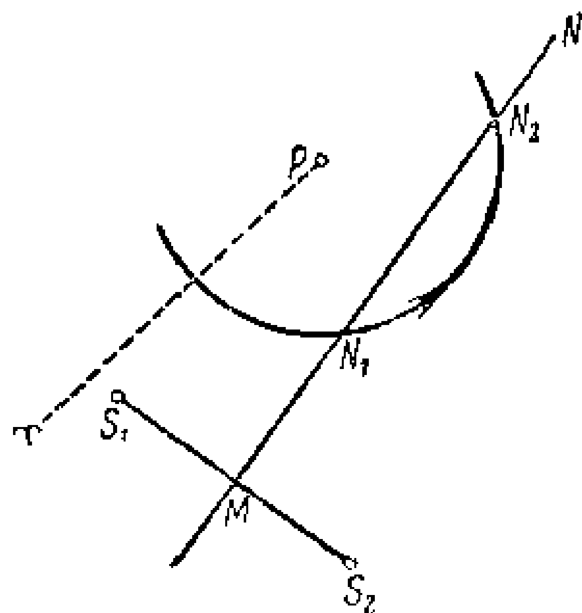


圖 32.

赤經等於當時的恆星時)。所以,此問題有兩解;但 MN 可能和平行圈相切,此時兩解合而爲一;MN 也可能不和平行圈相交,則無解。

若 MN 由天極附近通過,N_1 和 N_2 兩點差不多位於同一直徑的兩端,即當兩星等高時,N_1, N_2 的 α 或當時的恆星時相差近於 12^h;在每一個這樣的時刻,S_1, S_2 兩星之一在子午圈之東,另一個在西面。若 MN 和周日平行圈相交的弦很短,則 N_1, N_2 和要求的二時刻彼此很近,另外,在此時刻,S_1 和 S_2 在子午圈的同一面;或在東面,或在西面。只要完全清楚地給出恆星 S_1 和 S_2,大圓 MN 和天頂的周日平行圈在天球上的位置,則上面所有的結論就容易推出。

記 MN 和天赤道的交角爲 I,不難看出;若 MN 和天頂的周日平行圈相切,則 $I=\varphi$;本題有解無解就可由此決定。

解的可能性知道後,根據問題的條件寫出公式:

$$\cos z=\sin\varphi\sin\delta_1+\cos\varphi\cos\delta_1\cos(s-\alpha_1)=$$
$$=\sin\varphi\sin\delta_2+\cos\varphi\cos\delta_2\cos(s-\alpha_2)。$$

需要求 s。我們用 H. Я. 辛格的方法。引入新未知量 $x=s-\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)$,並記半差 $\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1)$ 爲 β。則

$$\sin\varphi\sin\delta_1+\cos\varphi\cos\delta_1\cos(x+\beta)=\sin\varphi\sin\delta_2+\cos\varphi\cos\delta_2\cos(x-\beta),$$
$$\sin\varphi\sin\delta_1+\cos\varphi\cos\delta_1(\cos x\cos\beta-\sin x\sin\beta)=$$
$$=\sin\varphi\sin\delta_2+\cos\varphi\cos\delta_2(\cos x\cos\beta+\sin x\sin\beta)。$$

展開這些括弧,並引入新的括弧,則得:

$$\cos\varphi\cos x\cos\beta(\cos\delta_1-\cos\delta_2)-\cos\varphi\sin x\sin\beta(\cos\delta_1+\cos\delta_2)=$$
$$=\sin\varphi\sin\delta_2-\sin\varphi\sin\delta_1。$$

記 $\frac{1}{2}(\delta_1+\delta_2)$ 爲 δ, $\frac{1}{2}(\delta_2-\delta_1)$ 爲 ε,並以 $\cos\varphi$ 除等式兩端得

$$\cos x\cos\beta\times 2\sin\delta\sin\varepsilon-\sin x\sin\beta\times 2\cos\delta\cos\varepsilon=\tan\varphi\times 2\sin\varepsilon\cos\delta。$$

引入輔助量 N 和 m,使 $m>0$,並且

$$m\sin N=\sin\delta\sin\varepsilon\cos\beta,$$
$$m\cos N=\cos\delta\cos\varepsilon\sin\beta;\ N\ 唯一地決定。$$

於是 $$m\sin N\cos x-m\cos N\sin x=m\sin(N-x)=\tan\varphi\sin\varepsilon\cos\delta。$$

由此 $$\sin(N-x)=\frac{\tan\varphi\sin\varepsilon\cos\delta}{m}=\frac{\tan\varphi\sin\varepsilon\cos\delta\sin N}{\sin\delta\sin\varepsilon\cos\beta}=\frac{\tan\varphi\cot\delta\sin N}{\cos\beta},$$

又 $$\sin(N-x)=\frac{\tan\varphi\sin\varepsilon\cos\delta\cos N}{\cos\delta\cos\varepsilon\sin\beta}=\frac{\tan\varphi\tan\varepsilon\cos N}{\sin\beta}。$$

由此得出 x,然後 $s=\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)+x$。

我們要提出下面的問題,現在此處稍談一下:在我們的公式中指出了,問題的解並不總是

有的。由於 ε, β 和 N 都不依賴於 φ，故 φ 可能大到使 $\sin(N-x)>1$；顯然 φ 的最大值由下列條件決定：

$$1=\frac{\tan\varphi\cot\delta\sin N}{\cos\beta}=\frac{\tan\varphi\tan\varepsilon\cos N}{\sin\beta};$$

此時，$N-x=90°$。在我們的公式中是否指出了在普通情況下有兩解的可能性呢？由於 $\sin(N-x)$ 給出 $N-x$ 兩個值；若一個記為 y，另一個為 $180°-y$；以 $x=s-\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)$ 代入在第一種情形得

$$N-s+\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)=y,$$

即
$$s=N+\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)-y,$$

而在第二種情形
$$N-s+\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)=180°-y,$$

即
$$s=N+\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)+y-180°。$$

若 $y=90°$，即若 $\frac{\tan\varphi\cot\delta\sin N}{\cos\beta}=1$，或同樣若 $\frac{\tan\varphi\tan\varepsilon\cos N}{\sin\beta}=1$，則兩解合為一個。

注意，用公式不是那樣容易就導出關於極限緯度的幾何意義，以及在各種情形中兩星對於子午圈的各種位置的結論，而這從幾何見解倒是很容易導出的。

當然，事實上，在兩星等高時，不可能同時觀測到二星。因此，為實用起見，解下面的類似問題是很重要的：已知二星 S_1，S_2 和觀測地的緯度 φ；求地方恆星時的時刻 s，使 S_1 在 s 時的高度和 S_2 在 $s+\Delta s$ 時的高度相等，其中 Δs（正或負）為給定的"分"數。顯然在此情形中原始方程式為：

$$\cos z=\sin\varphi\sin\delta_1+\cos\varphi\cos\delta_1\cos(s-\alpha_1)=$$
$$=\sin\varphi\sin\delta_2+\cos\varphi\cos\delta_2\cos(s+\Delta s-\alpha_2)。$$

但是，若在其中以 $\alpha_2-\Delta s$ 代替 α_2，在已解決的問題與原始方程式也是這種形式；因此就在所得到的解中只需各處換 α_2 為 $\alpha_2-\Delta s$，於是

$$x=s-\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2-\Delta s),\ \beta=\frac{1}{2}(\alpha_2-\Delta s-\alpha_1)$$ 等，直到最後。

2．第二個是關於日全食時日冕照相的問題。有時為了此目的，將長的照相望遠鏡放置在水平位置，並在日鏡前擱一個固定的平面鏡，全食時日冕光線由它反射入望遠鏡內。因為平面鏡是不動的，故日冕的像由於地球自轉而在底片上運動；為了使照片清楚起見，需要使照相底片按日冕運動的方向和同一速度運動，或使望遠鏡目鏡朝反方向運動。

觀測地點預先選定，於是緯度 φ，經度 λ 都已知。可以預先算出食甚時的地方民用時，故此時的太陽時角 t 和赤緯 δ 都知道了，即是說可以算出太陽的天頂距 z 和地平經度 A。需要解此問題：若水平的望遠鏡由目鏡向底片方向的地平經度等於 A_1，則全食時日冕的像向哪個方向運動？為此要預先安裝使底片或目鏡運動的機械。

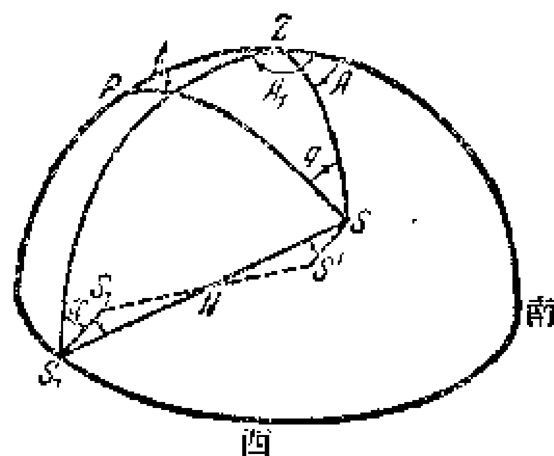


圖 33.

爲要解此問題,設天球中心在不動的平面鏡上。在圖 33 中 P 爲北天極,Z 爲天頂,S 爲太陽,S_1 爲天球上望遠鏡軸由目鏡到底片的方向;S_1 在地平上。已知 $ZS=z$,和太陽的地平經度爲 A;"南"表示南點;星位角 PSZ 認爲由 SP 向 SZ,總是按順時針方向;因此在西半天球時它在 0° 和 180° 之間;在東半天球時在 180° 和 360° 之間;記它爲 q。記 S_1 的地平經度爲 A_1。太陽中心運動的方向爲 SS',垂直於 PS。令平面鏡的法線和天球相交於 N;按光線反射定律,N 必須在 SS_1 弧上,並且 $SN=NS_1$;S' 按同一定律反射到 S_1' 點,使得 $S'N=NS_1'$;即 S_1S_1' 爲太陽中心在全食時在底片上運動的方向。注意,在實際條件中,觀測者面向底片和目鏡,看見日冕的像在底片上的運動,如圖 33 所畫的一樣(即在天球外面看)。所要求的角爲 S_1Z(垂直圈)和 S_1S_1' 間的交角;它認爲是由 S_1Z 向 S_1S_1' 按順時針方向由 0° 量到 360°(無論在東或西半天球);用 x 表示它。

問題由所考慮的球面三角形 ZSS_1 來解決。在此三角形中,$ZS_1=90°$,$ZS=z$,角 $SZS_1=A_1-A$;SS' 和 SS_1 之間的角認爲由 SS' 向 SS_1,總是按順時針方向由 0° 量到 360°,記爲 S。因 $SN=NS_1$,$S'N=NS_1'$,SNS_1 和 $S'NS_1'$ 爲大圓弧,故三角形 NSS' 和三角形 NSS_1' 相等,因此 $NS_1S_1'=NSS'$;S_1S_1' 和 S_1S' 之間的角當作由 S_1S_1' 向 S_1S 按順時針方向由 0° 量到 360°,可以看出它 $=S$。

在這些條件下,角度和它的符號的計算按圖 33 中三角形 ZSS_1 有:角 $ZSS_1=90°-q+S$,角 $ZS_1S=S+x$,用球面三角形的基本公式得:

$$\left.\begin{aligned}
\sin S_1S\cos(S+x)&=\cos z,\\
\sin S_1S\sin(S+x)&=\sin z\sin(A_1-A),\\
\sin S_1S\cos(S-q)&=\sin(A_1-A),\\
\sin S_1S\sin(S-q)&=-\cos z\cos(A_1-A)。
\end{aligned}\right\}\tag{51}$$

若 S 點在東半天球,則 t,A,q 大於 180°,在三角形 SZS_1 中的式子將爲另一形式,但最後的式子相同。例如在圖 34 中有:

$$q>180°,\ S>180°;$$

角 $ZSS_1=$角$ZSS_1'+$角$S'SS_1=(q-270°)+(360°-S)=$
$=90°-s+q$;

角 $ZS_1S=$角 $ZS_1S_1'-$ 角 $SS_1S_1'=x-(360°-S)=$
$=S+x-360°$。

再按球面三角形的基本公式就得出上面所寫的公式(51)。

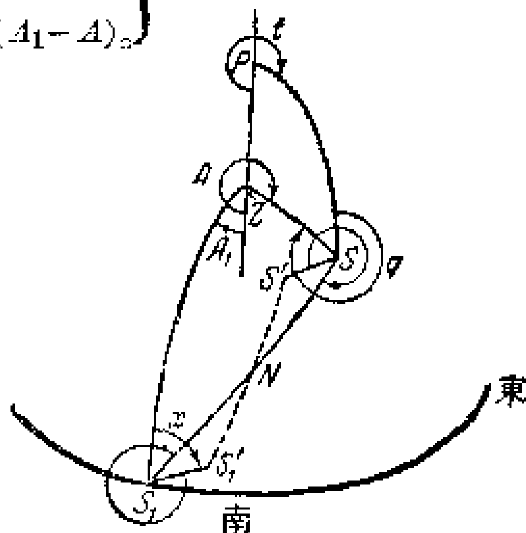


圖 34.

必需（1）按已知的 z, A, q 和所選擇的某個 A_1 來求 x，或（2）按已知的 z, A, q 和所選擇的 x 來求 A_1。

在第一種情形中，由(51)的最後兩個方程式求出 S（並驗算！），而按前兩式求出 $(S+x)$，因此就求出 x。

在第二種情形有：

$$\sin(A_1-A)=\sin SS_1\cos(S-q)=\sin SS_1\cos(S+x-q-x)=$$
$$=\sin SS_1\cos(S+x)\cos(q+x)+\sin SS_1\sin(S+x)\sin(q+x)=$$
$$=\cos z\cos(q+x)+\sin z\sin(A_1-A)\sin(q+x);$$

由此
$$\sin(A_1-A)=\frac{\cos z\cos(q+x)}{1-\sin z\sin(q+x)};$$

此後由基本方程式有：

$$-\cos z\cos(A_1-A)=\sin SS_1\sin(S+x-q-x)=$$
$$=\sin z\sin(A_1-A)\cos(q+x)-\cos z\sin(q+x),$$

在右邊代入已求出的 $\sin(A_1-A)$ 的公式，經過簡單的轉換得：

$$\cos(A_1-A)=\frac{\sin(q+x)-\sin z}{1-\sin z\sin(q+x)}。$$

根據 $\sin(A_1-A)$ 和 $\cos(A_1-A)$ 的公式單值地求出 (A_1-A)（用計算機更快），並因 A 為已知，故 A_1 可求出了。

對於這些計算，必須知道太陽中心在食甚時的 z, A, q。按日食的預先計算可知在緯度 φ 經度 λ 的地方，食甚時的格林尼治民用時，這表示可以算出太陽的時角 t（地方眞太陽時）；太陽赤緯 δ 也就知道了。因為必須計算三個值：z, q, A，最好用達朗貝爾公式［參看§9公式（7）］：

$$\cos\frac{1}{2}z\sin\frac{1}{2}(A-q)=\sin\frac{1}{2}t\sin\frac{1}{2}(\varphi+\delta),$$

$$\cos\frac{1}{2}z\cos\frac{1}{2}(A-q)=\cos\frac{1}{2}t\cos\frac{1}{2}(\varphi-\delta),$$

$$\sin\frac{1}{2}z\sin\frac{1}{2}(A+q)=\sin\frac{1}{2}t\cos\frac{1}{2}(\varphi+\delta),$$

$$\sin\frac{1}{2}z\cos\frac{1}{2}(A+q)=\cos\frac{1}{2}t\sin\frac{1}{2}(\varphi-\delta)。$$

這些公式單值地給出 z, A, q 和驗算公式，此外，對於 A, q 還給出上面所指出的計算它們的定則。

食甚時，太陽變化速率可用每分鐘 15′，因此，太陽的角速度等於 $15'\cos\delta$，而日冕的像在底片上的角速度等於 $F\cdot\frac{15'\cos\delta}{3478'}$ 毫米/分，其中 F 為目鏡焦距的毫米數。底片運動速度必須為此值，方向和垂直圈的交角為 x，或相反，目鏡向和垂直圈成 $x+180°$ 的方向按此速度

運動，使得日冕的像在底片上不動。

若希望日冕的像在底片上沿水平方向運動，則必須使 $x=90°$ 或 $270°$，並按下列公式求出對應的 A_1：

$$x=90°;\quad \sin(A_1-A)=\frac{-\cos z\sin q}{1-\sin z\cos q};$$

$$\cos(A_1-A)=\frac{\cos q-\sin z}{1-\sin z\cos q};$$

$$x=270°;\quad \sin(A_1-A)=\frac{\cos z\sin q}{1+\sin z\cos q};$$

$$\cos(A_1-A)=\frac{-\cos q-\sin z}{1+\sin z\cos q}。$$

由所得到的 S_1 的兩個值中，必須取那和 S 近些的一個，使得太陽光線對平面鏡的入射角小些。

第七章　大氣折射

§51. 基本觀念；名詞；問題的建立　從天體到觀測者的光線，因經過地球大氣而產生的屈折現象，稱爲天文的大氣折射。由於大氣折射，觀測者看到的天體的方向與沒有大氣時不同；這個方向差也稱爲大氣折射。

大氣折射的値與空氣的折射率有關；由物理實驗知，空氣折射率又與空氣密度有關；即若以 μ 表示折射率，以 δ 表示密度，則 $\mu-1=c\delta$，其中 c 爲一常數。密度 δ 又與觀測時的溫度 t° 及氣壓有關，氣壓可用氣壓計的水銀柱高度 $p\,mm$ 表示，並假定水銀和銅標的溫度爲 0°（在同一氣壓下，水銀高度與溫度有關），又重力的強度和在緯度 45° 的海平面一樣。

因此 p 並不是在觀測時直接讀出的氣壓計裏水銀柱的高度 $B\,mm$，而要由 B 用下列方法算出來。若水銀與銅標的溫度爲 T°C，則水銀柱的高度等於 0°C 時的 $(1+0.0001818T)$ 倍（0.0001818 爲水銀的體脹係數）又等於 0°C 時的 $(1+0.0000187\,T)$ 分之一（0.0000187 爲銅的線脹係數）；因此化 B 到 0°C 時應乘以 $\frac{1+0.0000187\,T}{1+0.0001818\,T}$ 或 $(1-0.000163\times$ $\times T)$。壓力是用水銀柱的重量表示，而重量與當地緯度 φ 有關；$g_{\varphi}=$ $=g_{45}(1-0.00265\cos 2\varphi)$；因此化 B 到緯度 45°，應將 B 乘上 $(1-$ $-0.00265\cos 2\varphi)$；除此之外，g 又與觀測地的拔海高度 h（公里）有關：

$$g_h=g_0\frac{R^2}{(R+h)^2}=g_0\left(1+\frac{h}{6371}\right)^{-2}=g_0\left(1-\frac{2h}{6371}\right)=$$

$$=g_0(1-0.000314\,h)。$$

最後，除上述之外，空氣折射率還與空氣的濕度有關；若水汽壓力爲 $\pi\,mm$，則需換 p 爲 $p\left(1-\frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{760}\right)$。在最後結果中，若 B 爲水銀柱高度的讀數，而 T 爲氣壓計中的溫度，則

$$p = B(1-0.000163\,T)(1-0.00265\cos 2\varphi)\times$$
$$\times(1-0.000314\,h)\left(1-\frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{760}\right)。\qquad(52)$$

在實用上，用對數計算大氣折射很方便，由上式得($M=0.4343$)：

$$\log p = \log B - M\,0.000163\,T - M\,0.00265\cos 2\varphi -$$
$$- M\,0.000314\,h - M\,0.0001645\,\pi$$

或

$$\log p = \log B - 71\,T - 1151\cos 2\varphi - 136\,h - 72\,\pi\ 。\qquad(53)$$

在此公式中數目字是以 10^{-6} 爲單位，爲了計算 p 的方便起見，造出了一種特殊的表。在以後，符號 p 就代表改正了的 B 。

空氣溫度 t°C 表示在儀器室外但離它不遠的空氣溫度，在儀器室內如其天窗的寬度就是一般的寬度，則，比方說，氣壓計的溫度總要稍許高一些(約高 1—2 度)，無論天文學家正怎樣努力用通風辦法使室內室外溫度相等。

根據玻意耳-馬利奧特定律及蓋-呂薩克定律

$$\delta = D\frac{P}{760}\cdot\frac{273^{\circ}}{273^{\circ}+t^{\circ}},$$

其中 D 爲標準狀況下，卽 $p=76\,cm$，$t^{\circ}=0^{\circ}$C 時的空氣密度；根據物理的測定 $D=0.0012928$ 。

空氣密度隨着離地面的高度的增加而減小，因爲上層空氣用自己的重量壓在每一層上，但密度的下降率又因溫度的降低(卽隨着高度的上昇而降低)而減弱；然而，一般說來密度以及空氣折射率隨高度而減小。由於 μ 的連續變化，使從恆星射來的光線在大氣中成了曲線。折射的值就與 μ 隨高度的變化有關。正如我們馬上要看到的，由於 μ 隨高度而減小，觀測者所看到的恆星天頂距，比沒有大氣時要小；可以說，大氣折射使天體更接近天頂。大氣折射的值是隨天體天頂距的增加而增加。

若大氣爲平靜的，卽在其中沒有任何運動，沒有風，則每一個密度

相同的層(也就是折射率相同的層)位於一個水平面上,即在一曲面上,此曲面的每一點的法線和此點的重力線同方向,好像在一容器中不同密度的液體的分界面在平靜狀況下爲水平的,即垂直於地球吸力方向一樣。那樣的曲面稱爲水平面或等位面,其一就是在無浪,無風,無潮汐時的平靜的海面或洋面。此曲面非常接近於以地球的短軸爲短軸的旋轉橢圓面。它常常(包含地球表面在內)被用來當作球面;在大氣折射理論中就是這樣作的。

不平的地面(高山,丘陵,平原和深淵)不能破壞在平靜狀態下大氣的水平面,好像在一容器中,裝了水銀,水及油,若在容器底上升起一個玻璃的"山"穿過這三種液體,則三種液體的分界面仍然爲水平面。地面不平只能使水平面對橢球面有不大的偏差,但這一點偏差太小了,所以在大氣折射理論中不必去注意它;因此在大氣折射中,水平面就認爲是球面,公共中心在通過觀測地的向地球內部的鉛垂線上;公共中心到地面的距離是採取地球的平均曲率半徑(以後我們將看到,這樣的準確度對大氣折射是足夠了)。

由於上述,在平靜大氣中,密度相同的點在觀測地鉛垂線的各方面的分佈都是相同的。因此,如果設想有一光線在大氣中的路線和通過路線的最後一段(近觀測者)的豎直面,則顯然的,全部光線都在此平面上,因爲折射率在此平面的左邊和右邊的分佈是完全對稱的。即是說,在所指出的假定下,大氣折射不改變天體的地平經度,而只改變天體的天頂距。

大氣折射理論在於求下面兩個方向間的交角:(1)光線的行徑在近觀測者的最後一點的切線方向,(2)在該處折射率等於1的大氣邊界上,光線的切線方向,這些方向都是在上面指出的大氣爲平靜的假定下作的。然而在解此問題之先,討論一個類似的但更簡單的問題是有益的,即假定折射率相同的面是眞的水平面。

托勒玫已經知道大氣折射的存在，在他的著作“光學”中已提到，但不是在“天文集”中。他指出恆星在出沒時的極距比中天時小一些。第谷用純粹經驗的方法來確定大氣折射。他看出，他的天文台的緯度用北極星中天來求要比用夏至日太陽中天求出的大$4'$。他觀測恆星在不同地平經度時的高度，發現：只有假定大氣折射存在，並且大氣折射隨恆星天頂距增加而增加，才能使計算出來的極距彼此相符合。

克普勒企圖建立大氣折射的理論，但在那時還不知道光的折射的準確定律，實際上，到十七世紀後半，多美尼克，卡西尼才創造了第一個理論。他認爲光線只是在大氣邊界屈折一次。與卡西尼同時代的比卡發現大氣折射與溫度有關。到十八世紀才知道大氣折射與氣壓有關。更接近於實際的理論是被牛頓，辛卜森，布拉得雷等提出。辛卜森的公式爲：

$$\text{折射}\ \rho = C\tan\left(\zeta - \frac{m}{2}\rho\right),$$

其中量 C 與 m 要由觀測確定。布拉得雷估計到儀器附近的空氣密度對大氣折射有影響，他用公式

$$\rho = \frac{b}{29.6}\times\frac{450-t}{400}\times 57''\tan(\zeta-3\rho)$$

來計算大氣折射表，其中 b 爲氣壓計水銀柱高度的吋數，t 爲溫度的華氏度數。

歐拉，拉格朗日，拉普拉斯，白塞耳也從事於大氣折射理論的研究。白塞耳的公式和表在十九世紀是最被廣泛採用的，在該世紀後半由基里捷恩所作的普耳科夫表還未代替它。所有的理論中都採用 $\mu^2-1=$ $=c\delta$，如第一次測定空氣折射係數所證明的；最新的研究證明，$\mu-1=$ $=c\delta$ 才更準確地和測量結果符合。白塞耳給出大氣折射的對數公式：

$$\log\rho = \log\alpha + \log\tan\zeta + \lambda\log\gamma + A(\log B + \log T),$$

基里捷恩也在普耳科夫表中保留它。現在，在所有的國家裏差不多都只用普耳科夫的表。

在地面上不同高度的空氣密度和溫度的公式在每一個理論中都很重要。對於計算天頂距大於 75° 時的大氣折射這是必要的，因為早就明白了，對於天頂距很小時的大氣折射可以足夠準確地計算出來，不需要知道空氣密度隨高度增加而減低的定律。

在二十世紀，哈爾切爾建立了新的折射理論，並根據用氣球得出的不同高度的空氣溫度計算了折射表。

§52. 等密度層爲水平面的情形的大氣折射　圖 35 表示包含光線的竪直面。假定折射率作跳躍式變化，使得每一等密度層的厚度爲有限並與其他的層不同。把貼近地面的那一層記爲 0，上面各層依次爲 1, 2, 3, …, n, $(n+1)$, …。由於各層的分界面互相平行，

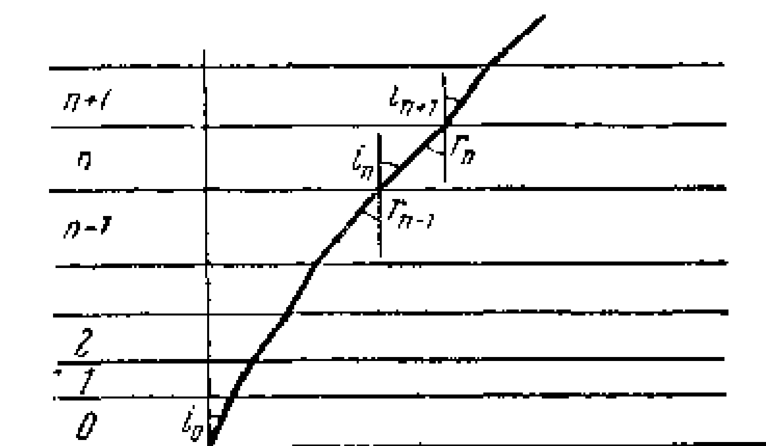


圖 35.

各分界面的法線也互相平行。圖中折線表示光線路徑。在第 $(n+1)$ 層中的入射角記爲 i_{n+1}，在第 n 層中對應的折射角記爲 r_n，在第 n 層與第 $(n-1)$ 層分界面的入射角記爲 i_n，餘類推，但必須注意，因分界面彼此平行，在每一層中 $i_n=r_n$。各層的折射率記爲 μ_{n+1}, μ_n, …, μ_1, μ_0（貼近地面那層）。根據斯涅留斯定律有下列等式：

$$\mu_{n+1}\sin i_{n+1}=\mu_n\sin r_n=\mu_n\sin i_n,$$

$$\mu_n\sin i_n=\mu_{n-1}\sin r_{n-1}=\mu_{n-1}\sin i_{n-1},$$

…………………………………

…………………………………

$$\mu_3\sin i_3=\mu_2\sin r_2=\mu_2\sin i_2,$$

$$\mu_2\sin i_2=\mu_1\sin r_1=\mu_1\sin i_1,$$

$$\mu_1\sin i_1=\mu_0\sin r_0=\mu_0\sin i_0。$$

把所有這些等式相乘或相加可知，所有的中間項都消去了，只剩下第一

項及最後一項,我們就得到:

$$\mu_{n+1}\sin i_{n+1}=\mu_0 \sin i_0 \text{。}$$

i_0 角就是可觀測到的天體之視天頂距;用 ζ 表示。最後的那個關係式不管折射率 μ 怎樣變化都是對的;並且與層數和各層厚度無關;令各層厚度趨於零,我們便得出結論:在折射率由地面到大氣邊界(該處 $\mu=1$)作連續變化但有些地方亦作跳躍式變化的情況下,上面的關係式仍然正確。用 z 表示在大氣邊界的 i,則可知 z 爲大氣不存在時天體的天頂距;也就是說大氣折射值等於 $z-\zeta$。在此情形下

$$\mu_0 \sin \zeta = 1 \cdot \sin z \text{。} \tag{54}$$

由已知的 μ_0 及 ζ 計算出 z,我們就得到大氣折射 $z-\zeta$。

這樣一來,我們得到了問題的準確解答,並看出大氣折射只與 ζ, μ_0 有關,而與折射率隨離地面的高度 h 的減少(或暫時的增加)規律完全無關。

由等式(54)可見,因 $\sin z$ 不能大於 1,故 ζ 的最大值只能爲 $\sin\zeta = \frac{1}{\mu_0}$;對於地球的條件,$\mu_0$ 差不多等於 1.0003,即若各等密度層爲水平時,ζ 的極限值爲 $88°40'$。在 ζ 很大時,上層會產生全反射,卽觀測者看到的光線不是由天體來的,而是由地面來的。

我們可以用級數的形式表出大氣折射 $\rho=z-\zeta$。注意到 $\sin z - \sin\zeta = (\mu_0 - 1)\sin\zeta$,我們將視 z 爲 $\sin z$ 的函數,由泰勒定理得:

$$z-\zeta=(\sin z-\sin\zeta)\bigg|_{z=\zeta} \frac{dz}{d\sin z}+\frac{1}{2}(\sin z-\sin\zeta)^2\bigg|_{z=\zeta} \frac{d^2 z}{(d\sin z)^2}+\cdots$$

由此得

$$z-\zeta=(\sin z-\sin\zeta)\frac{1}{\cos\zeta}+\frac{1}{2}(\sin z-\sin\zeta)^2\frac{\sin\zeta}{\cos^2\zeta}\cdot\frac{1}{\cos\zeta}+\cdots$$

以 $\sin z-\sin\zeta=(\mu_0-1)\sin\zeta$ 代入,得:

$$\rho=z-\zeta=(\mu_0-1)\tan\zeta+\frac{1}{2}(\mu_0-1)^2\tan^3\zeta+\cdots\text{。}$$

由此可見,若 ζ 不很大時,第一項以後各項對 ρ 的影響不大,可以

取

$$\rho = z - \zeta = (\mu_0 - 1)\tan\zeta。$$

爲了更合於實際情況，取等密度層爲球形，我們也得到相似的結果。

§53. 天文大氣折射基本積分的推導 根據上述，在所有的大氣折射理論中(哈爾切爾的理論除外)，都採用等密度面爲球面，公共中心在通過觀測地點的鉛垂線上。首先假定 μ 相等的層的厚度爲有限，分界面爲以公共中心爲中心的球面。因此各層分界面的法線就是通過公共中心的半徑。圖 36 表出包含光線路徑的豎直面。由地面開始各層的號數記爲 0, 1, 2, …, n, $(n+1)$，各層的折射率依次爲 $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n, \mu_{n+1}, \cdots$，各層分界面的半徑，由地面開始依次記爲 R, R_1, R_2, …, R_n, R_{n+1}, …。在第 $n+1$ 層中的那段光線與它進入第 n 層時所經那點的法線間的交角記爲 i_{n+1}，而第 n 層內對於同一法線的折射角記爲 r_n，同樣，在第 n 層的那段光線與它進入第 $n-1$ 層所經那點的法線間的交角記爲 i_n。按光的折射定律有：

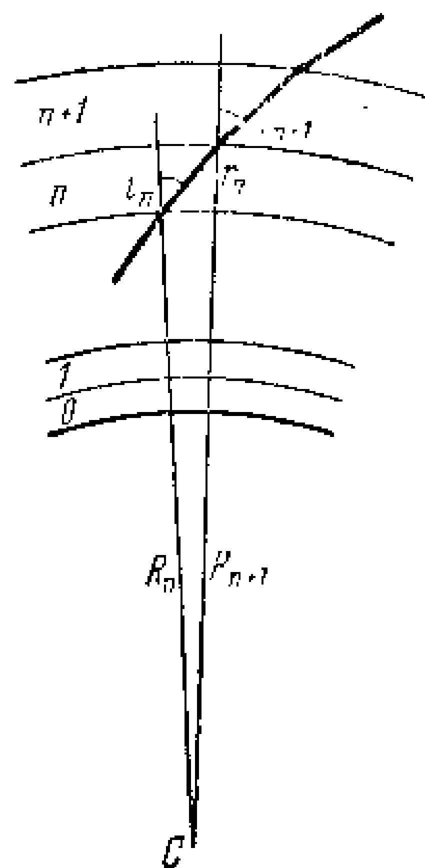


圖 36.

$$\mu_{n+1}\sin i_{n+1} = \mu_n \sin r_n。$$

顯然，光線由第 $n+1$ 層進入第 n 層時被折射掉的角度等於 $i_{n+1} - r_n$；用符號 $\Delta\rho$ 表示；差數 $\mu_{n+1} - \mu_n$ 用 $\Delta\mu$ 表示。對於光線由第 $n+1$ 層進入第 n 層所經過的那一點，從最後的那個等式可得下面關係式：

$$\mu_{n+1}\sin i_{n+1} = (\mu_{n+1} - \Delta\mu)\sin(i_{n+1} - \Delta\rho)。$$

視 $\Delta\rho$ 爲微小量，忽略它的二次項和更高次的各項，得

$$\mu_{n+1}\sin i_{n+1} = (\mu_{n+1} - \Delta\mu)(\sin i_{n+1} - \Delta\rho\cos i_{n+1}) =$$

$$= \mu_{n+1}\sin i_{n+1} - \Delta\mu\sin i_{n+1} - \Delta\rho\,\mu_{n+1}\cos i_{n+1} + \Delta\mu\,\Delta\rho\cos i_{n+1}，$$

由此得： $\Delta\rho\,\mu_{n+1}\cos i_{n+1} = -\Delta\mu\sin i_{n+1} + \Delta\mu\,\Delta\rho\cos i_{n+1}$，

又 $$\frac{\Delta\rho}{\Delta\mu} = -\frac{1}{\mu_{n+1}}\tan i_{n+1} + \frac{\Delta\rho}{\mu_{n+1}}。$$

現在轉到折射率作連續變化的情形，可認爲 $\Delta\rho$，$\Delta\mu$ 是無限小量，就得到 $\frac{d\rho}{d\mu} = -\frac{1}{\mu}\tan i$，這對於光線上每一點都對。這就是光線路徑的基本方程式；i 爲光線路徑的切線與折射率爲 μ 的等密度面的法線間的交角；我們再用各層爲球形的條件來找出 i，μ，R 間的關係。

實際上，由三邊爲光線在第 n 層中的一段及兩個半徑 R_n，R_{n+1} 的狹窄的直線三角形（參看圖 36），得：

$$\frac{R_{n+1}}{R_n} = \frac{\sin(180^\circ - i_n)}{\sin r_n},$$

在此代入 $\sin r_n$ 的值（參看上面）：

$$\sin r_n = \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}\sin i_{n+1},$$

得： $$\frac{R_{n+1}}{R_n} = \frac{\sin i_n}{\mu_{n+1}} \cdot \frac{\mu_n}{\sin i_{n+1}},$$

最後得： $$\mu_{n+1} R_{n+1}\sin i_{n+1} = \mu_n R_n \sin i_n。$$

對於任意的 n 此式都對，因此

$$\mu_n R_n \sin i_n = \mu_{n-1} R_{n-1}\sin i_{n-1},$$

....

....

$$\mu_2 R_2 \sin i_2 = \mu_1 R_1 \sin i_1,$$

$$\mu_1 R_1 \sin i_1 = \mu_0 R \sin i_0。$$

把這些等式相乘或相加得：

$$\mu_0 R\sin i_0 = \mu_{n+1} R_{n+1}\sin i_{n+1}。$$

其中 μ_0 爲靠近儀器的空氣折射率，R 爲地球半徑，i_0 爲天體的視天頂距，以後將記爲 ζ。最後的那個關係式對任意的 n 及任意的各層厚度都對，也就是說，在極限情形，即 μ 作連續變化時，此式也對；在此情形

下，對於光線路徑上每一點，其折射率爲 μ，到球面的公共中心的距離爲 r（代替前面的 R），光線路徑的切線與半徑 r 的交角爲 i，有下面關係式：

$$\mu r \sin i = \mu_0 R \sin \zeta;$$

μ_0，R，ζ 假定爲已知。R 最好採用在觀測地點地球的平均曲率半徑，但對於中間的緯度取一個 R 值就夠準確了，即取 6378 公里。這個值是在兩極的 R(6400) 及在赤道的 R 的平均值(6357)的平均值；在 $\zeta=80°$ 時，此數值的 ± 21 公里的變化就使大氣折射變化 $\pm 0''.04$，在數字表中將會看到：

於是，爲了解決我們的問題，有了下面兩個方程式：

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\mu} &= -\frac{1}{\mu}\tan i, \\ \mu r \sin i &= \mu_0 R \sin \zeta。\end{aligned}\right\} \tag{55}$$

由第一個有

$$\int_\zeta^z d\rho = \text{大氣折射 } \rho = z - \zeta = -\int_{\mu_0}^1 \frac{d\mu}{\mu}\tan i;$$

此積分是假定由地面積到大氣的邊界，因此 μ 由積分下限到上限在減少；在相反的情況下積分爲 $z-\zeta=\int_1^{\mu_0} \frac{d\mu}{\mu}\tan i$。再把(55)的第二式所確定的 $\tan i$ 值代入。我們有

$$\sin i = \frac{\mu_0 R}{\mu r}\sin\zeta; \quad \cos i = \sqrt{1-\left(\frac{\mu_0 R}{\mu r}\sin\zeta\right)^2},$$

因此

$$\rho = z - \zeta = \int_1^{\mu_0} \frac{d\mu}{\mu} \frac{\frac{\mu_0 R}{\mu r}\sin\zeta}{\sqrt{1-\left(\frac{\mu_0 R}{\mu r}\sin\zeta\right)^2}} = \int_1^{\mu_0} \frac{d\mu}{\mu} \frac{\sin\zeta}{\sqrt{\left(\frac{\mu r}{\mu_0 R}\right)^2 - \sin^2\zeta}}。$$

這就是對應於前面所指出的，在大氣爲平靜的條件下所求的大氣折射積分。

然而，我們注意到下面情況；$d\rho$ 爲光在大氣中的彎曲道路上，兩條

無限接近的切線間的交角，因此$\int d\rho = z - \zeta$ 爲下面兩極限點的切線間的交角，即在觀測地 M 點的切線（圖 37 中的實線）及在大氣邊界的點的切線（圖 37 中的虛線）的交角，因此我們得出此二切線在 A 點的交角，它等於此二切線與觀測地鉛垂線的交角差；在 M 點的交角是 ζ，另外一個在 B 點的是 z。嚴格地講，我們應該取 M 點的切線與由 M 而不是 B 到天體的直線間的交角。此二直線間的差別就是由 M 點及 B 點觀測此天體時的視差。但在推導大氣折射值之後的討論指出，此視差的值對一切比月球更遠的天體都可以忽略，就是對於月球也只有它接近於觀測者的地平時才是重要的。

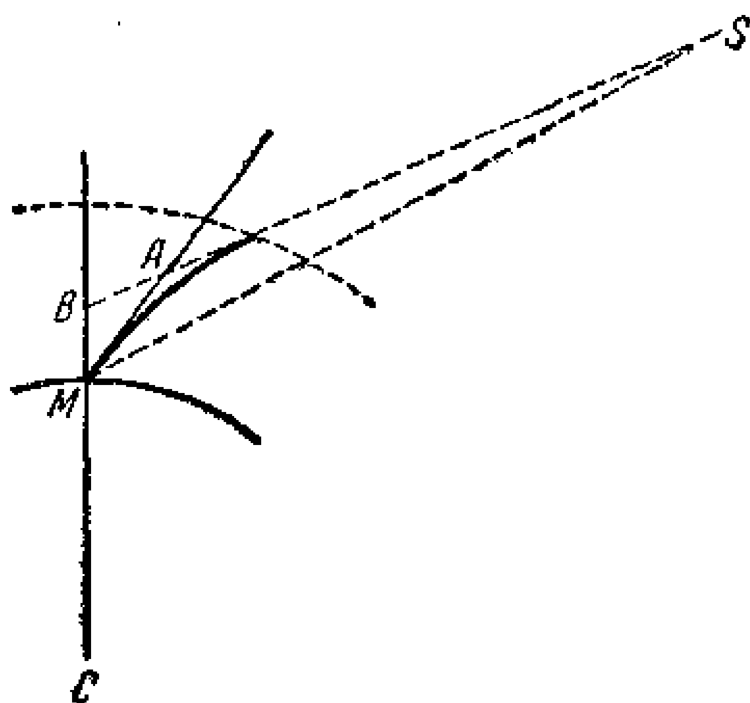


圖 37.

爲了計算大氣折射積分，需要知道 μ 是 r 的函數，或若令 $r = R + h$，需要知道 μ 是 h 的函數，其中 h 爲在觀測地點的水平面上的高度。然而，在實用上大氣折射的很重要的特點爲，不知道任何 μ 與 h 的關係，也可以算出大氣折射到充分大的準確度及充分大的天頂距。至於爲什麼會產生此特點，我們不久就要看到。以 $r = R + h$，$\mu = \mu_0 - (\mu_0 - \mu)$ 代入大氣折射積分，則得

$$\rho = z - \zeta = \int_1^{\mu_0} \frac{d\mu}{\mu} \frac{\sin\zeta}{\sqrt{\left(1 - \frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0}\right)^2 \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2 - \sin^2\zeta}} =$$

$$= \int_1^{\mu_0} \frac{d\mu}{\mu} \frac{\sin\zeta}{\sqrt{\left(1 + \frac{h}{R} - \frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0} - \frac{h}{R}\cdot\frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0}\right)^2 - \sin^2\zeta}}。$$

爲簡單起見，記

$$\frac{h}{R} - \frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0} - \frac{h}{R}\cdot\frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0} \quad 或 \quad \frac{h}{R}\cdot\frac{\mu}{\mu_0} - \frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0} \quad 爲 A . \qquad (56)$$

則 $$\rho = \int_1^{\mu_0} \frac{d\mu}{\mu} \cdot \frac{\sin\zeta}{\sqrt{(1+A)^2 - \sin^2\zeta}} = \int_1^{\mu_0} \frac{d\mu}{\mu} \frac{\sin\zeta}{\sqrt{1 - \sin^2\zeta + 2A + A^2}} =$$

$$= \tan\zeta \int_1^{\mu_0} \frac{d\mu}{\mu} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (2A + A^2)\sec^2\zeta}} =$$

$$= \tan\zeta \int_1^{\mu_0} \frac{d\mu}{\mu} [1 + (2A + A^2)\sec^2\zeta]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \tan\zeta \int_1^{\mu_0} \frac{d\mu}{\mu} \Big[1 - \frac{1}{2}(2A + A^2)\sec^2\zeta +$$

$$+ \frac{3}{8}(2A + A^2)^2 \sec^4\zeta - \frac{15}{48}(2A + A^2)^3 \sec^6\zeta +$$

$$+ \frac{105}{384}(2A + A^2)^4 \sec^8\zeta - \frac{945}{3840}(2A + A^2)^5 \sec^{10}\zeta + \cdots\Big] =$$

$$= \tan\zeta \int_1^{\mu_0} \frac{d\mu}{\mu} \Big[1 - \left(A + \frac{1}{2}A^2\right)\sec^2\zeta + \frac{3}{2}\left(A + \frac{1}{2}A^2\right)^2 \sec^4\zeta -$$

$$- \frac{15}{6}\left(A + \frac{1}{2}A^2\right)^3 \sec^6\zeta + \frac{105}{24}\left(A + \frac{1}{2}A^2\right)^4 \sec^8\zeta -$$

$$- \frac{945}{120}\left(A + \frac{1}{2}A^2\right)^5 \sec^{10}\zeta + \cdots\Big]。 \qquad (57)$$

在積分號下，我們得到一變號級數，在 ζ 不接近於 90° 時爲遞減，在 $(2A + A^2)\sec^2\zeta < 1$ 時爲收斂，在收斂的情況下，在 ζ 充分大時，它收斂得很慢，以至於不能用它，這在計算時將要看到。

這樣一來，大氣折射的積分就被分解成一系列的積分；我們按照 $\sec^2\zeta$ 的指數，把各積分記爲 I, II, III 等；在此次序中，從 II 開始，按照係數 $\left(A+\frac{1}{2}A^2\right)^k$ 中的項數。再分解爲幾個(當然是有限個)部份，例如 II_1, II_2, 等。

§54. 大氣折射主要項的計算　1. 第一個積分(I)爲 $\int_1^{\mu_0}\frac{d\mu}{\mu}$，有因子 $\tan\zeta$；積分等於 $\log\mu_0$；展開爲分析中已知的級數，有：

$$\mathrm{I}=\tan\zeta\left[\mu_0-1-\frac{1}{2}(\mu_0-1)^2+\frac{1}{3}(\mu_0-1)^3\cdots\right]。$$

根據已指出的物理研究

$$\mu_0-1=c\delta_0=cD\cdot\frac{p}{760}\cdot\frac{273^\circ}{273^\circ+t^\circ},$$

其中 c 爲某一常數，而 D 爲標準狀況下的空氣密度：卽在 $p=760\,mm$，$t=0^\circ$ ❶ 時的密度。因此

$$\mathrm{I}=cD\left[1-\frac{1}{2}(\mu_0-1)+\frac{1}{3}(\mu_0-1)^2-\cdots\right]\cdot\frac{p}{760}\cdot\frac{273^\circ}{273^\circ+t^\circ}\cdot\tan\zeta。$$

由於 μ_0-1 很小，括弧中前兩項以後各項不需要保留，因 μ_0-1 在平均狀況下 ($t=0^\circ$，$p=760\,mm$)等於 0.00029234，$\frac{1}{3}(\mu_0-1)^2=$ $=0.00000003$。以後我們將看到，甚至在 $\zeta=85^\circ$ 時第三項的影響也小於 $0''.001$。不但如此，在極端情況下(溫度爲 -30°C 及 $+30^\circ$C，氣壓計水銀柱高 730 mm 及 790 mm)，(μ_0-1)變化於 0.000260 及 0.000320 之間。因此若取$\left[1-\frac{1}{2}(\mu_0-1)\right]$的平均值，卽(1−0.0001462)來代替它，則由此產生的誤差，卽大氣折射的 $\frac{1}{70000}$，甚至在 $\zeta=85^\circ$ 時還不超過 $0''.01$ (參看 141 頁的表 3)。因此大氣折射的第一個積分值採用

$$\mathrm{I}=cD(1-0.0001462)\cdot\frac{p}{760}\cdot\frac{273^\circ}{273^\circ+t^\circ}\cdot\tan\zeta。\qquad(58)$$

❶ 公式 $\mu-1=c\delta$ 不僅在物理上說來比 $\mu^2-1=c\delta$ 準確，而且在數學上還更方便更有利，因計算起來更簡單。

這裏角度 $z-\zeta$ 用弧度表示；為要表示為角度秒，還需要乘上 $206265''$。係數 cD 可以由物理實驗測定，但最好是由觀測測出 $cD(1-0.0001462)$ 的值（參看 §56）。

$\tan\zeta$ 前面的係數為級數所有各項的係數；因此在 $t=0°C$ 及 $p==760\,mm$ 時稱它為大氣折射常數是恰當的，但它不等於所稱呼的那個值，主要是因為大氣折射的級數常按照 $\tan\zeta$ 的奇次冪展開。

2．含因子 $\tan\zeta\sec^2\zeta$ 的第二個積分 $\mathrm{II}=\int_1^{\mu_0}\frac{d\mu}{\mu}\left(A+\frac{1}{2}A^2\right)$ 可以分為兩個積分。其中第一個（參看 A 的式子）為 $\mathrm{II}_1=\int_1^{\mu_0}\frac{d\mu}{\mu}\cdot\frac{\mu h}{\mu_0 R}$。

將 $d\mu$ 改為等於它的 $d(1+c\delta)$ 卽 $cd\delta$；則得：

$$\mathrm{II}_1=\frac{c}{\mu_0}\int_0^{\delta_0}\frac{h}{R}d\delta\text{。}$$

用部份積分得：

$$\mu_0 R\,\mathrm{II}_1=c\int_0^{\delta_0}h\,d\delta=c\Big|_0^{\delta_0}h\delta-c\int_H^0\delta dh,$$

其中 H 表示空氣邊界 $\delta=0$ 處的高，事實上我們還不知道它的值；因為在積分上限時 $h=0$，在下限時 $\delta=0$，故前面那個積分的值為零，我們就得：

$$\mathrm{II}_1=-\frac{c}{\mu_0 R}\int_H^0\delta dh=\frac{c}{\mu_0 R}\int_0^H\delta dh\text{。}$$

積分 $\int\delta dh$ 不表示別的，而就是橫截面積為 $1\,cm^2$ 高度由觀測地到空氣邊界的空氣柱的質量；近似地等於橫截面積為 $1\,cm^2$ 的氣壓計中的水銀柱的質量。它們的差別只在於：以自己的重量平衡空氣的重量的水銀受到觀測地的重力 g_0 的作用，而空氣各部份則受到重力 g 的作用，離地心越遠 g 越小；因此上層空氣的重量要比在地面上的（如氣壓計裏的水銀柱那樣）小一些；這就是說，在我們這個假定下所得的大氣質量要比實驗情況小些．這一點常予忽略；以後我們可以計算出這個誤差。

為了要計算橫截面為 $1\,cm^2$ 的水銀柱在觀測條件下的質量，必須要

知道氣壓計中用厘米表示的水銀柱高度 p（關於 p，可參看§51）及其對應於此時的溫度的密度。因 p 化到 $0^\circ C$，故水銀密度也應取 $0^\circ C$ 的值，卽 13.5955；水銀質量等於 $p\times 13.5955$。我們設空氣質量也是這樣大，因此積分 $\Pi_1=\frac{c}{\mu_0 R}\times p\times 13.5955$。

爲了進一步計算，我們必須使它裏面有 $c\delta_0$ 這個因子；因此把 Π_1 寫爲：$\frac{c\delta_0}{\mu_0 R}\times\frac{13.5955\,p}{\delta_0}$；但正如我們早就看到的，$\delta_0=D\frac{p}{76}\times\frac{273^\circ}{273^\circ+t^\circ}$，而 $D=0.0012928$；代入 δ_0 的值得

$$\Pi_1=\frac{c\delta_0}{\mu_0 R}\times 13.5955\,p\bigg/\left(D\frac{p}{76}\times\frac{273}{273+t}\right)=$$

$$=\frac{c\delta_0}{\mu_0 R}\times\frac{273+t}{273}\times\frac{13.5955\times 76}{0.0012928}=\frac{c\delta_0}{\mu_0 R}\times\frac{273+t}{273}\times 7.99240$$

（7.99240 以公里爲單位）。

在所有的實際情形中可以取 $\frac{1}{\mu_0}=1-0.000292=(1-0.000146)^2$ 而誤差很小，並（參看上面）取 $R=6378$ 公里；則得：

$$\Pi_1=c\delta_0(1-0.000146)\frac{273+t}{273}\times\frac{7.9924}{6378}(1-0.000146)=$$

$$=c\delta_0(1-0.000146)\frac{273+t}{273}\times 0.00125294\text{。}$$

積分 Π 中的第二部份爲

$$\Pi_2=\int_1^{\mu_0}\frac{d\mu}{\mu}\cdot\frac{\mu_0-\mu}{\mu_0};$$

不難算出它等於

$$\log\mu_0-\frac{\mu_0-1}{\mu_0}=-\frac{\mu_0-1}{\mu_0}+(\mu_0-1)-\frac{1}{2}(\mu_0-1)^2+$$

$$+\frac{1}{3}(\mu_0-1)^3-\cdots=(\mu_0-1)^2\frac{2-\mu_0}{2\mu_0}+\frac{1}{3}(\mu_0-1)^3\text{。}$$

因 (μ_0-1) 很小，可以取

$$\Pi_2=\frac{1}{2}(\mu_0-1)^2=\frac{1}{2}(c\delta_0)^2\text{。}$$

合併所得的三個積分並提出公因子 $\tan\zeta$ 及其前面的係數，得：

$$I+II_1+II_2=c\delta_0(1-0.0001462)\tan\zeta\times$$

$$\times\left[1-\frac{273+t}{273}0.00125294\sec^2\zeta+\frac{1}{2}c\delta_0\sec^2\zeta\right]; \qquad (59)$$

這裏
$$c\delta_0=cD\frac{p}{760}\cdot\frac{273}{273+t}。$$

比較用此公式和用更完整的理論所得出來的大氣折射值是有益的。把它和根據普耳科夫的表對於 $t=0°C$，$p=760\,mm$ 計算出來的大氣折射比較一下，在我們的公式中，$\tan\zeta$ 前面係數取為 $60''.30$ 。則得公式：

$$z-\zeta=I+II_1+II_2=$$

$$=60''.30\tan\zeta-60''.30\,(0.0012529-0.0001462)\tan\zeta\sec^2\zeta=$$

$$=60''.30\tan\zeta-0''.066734\tan\zeta\sec^2\zeta。$$

和下面的表 3 。

表　3

ζ	I	II	I+II	普耳科夫表	差
10°	10''.633	− 0''.012	10''.621	10''.62	0''.00
20	21.947	− 0.027	21.920	21.92	0.00
30	34.814	− 0.051	34.763	34.77	+ 0.01
45	60.300	− 0.133	60.167	60.17	0.00
60	104.443	− 0.462	103.981	103.99	+ 0.01
65	129.314	− 0.801	128.513	128.52	+ 0.01
70	165.673	− 1.567	164.106	164.13	+ 0.02
75	225.043	− 3.718	221.325	221.47	+ 0.15
80	341.977	− 12.551	329.426	330.50	+ 1.07
81	380.719	− 17.217	363.502	365.28	+ 1.78
82	429.057	− 24.515	404.542	407.61	+ 3.07
83	491.104	− 36.594	454.510	460.19	+ 5.68
84	573.716	− 58.111	515.605	527.06	+11.46
85	689.235	−100.415	588.820	614.59	+25.77

注意：我們所算出的值與普耳科夫表的差，到 $\zeta=65°$ 時，差不超過

$0''.01$；在 $\zeta=70^\circ$ 時它等於 $0''.02$；甚至在 75° 時這個差僅有 $0''.15$，到 80° 時則達到 $1''.07$ 並且 $\zeta>80^\circ$ 時顯著地上升，但在那樣的天頂距時已經不能作任何的準確測量，因為氣流使天體在望遠鏡中的像常常不穩定。這就是說，在天頂距小於 70° 時完全不知道 μ 與 h 的關係也可以計算大氣折射，準確度在實用上已經足夠了。

然而天頂距很大時，μ 與 h 的關係就必須知道，天頂距愈大，這個關係必須知道得愈準確。根據同一表我們相信，忽略某些微小量是完全可以的；例如，在第二個積分(II)中，我們可以取分母的 μ_0 等於 1；由此產生的誤差僅為原值的 0.0003，即甚至在 $\zeta=80^\circ$ 時只有 $0''.004$。

大氣折射與壓力 p 及溫度 t° 的關係是很重要的。前兩項有公因子 $\frac{p}{760}\cdot\frac{273}{273+t}$，以後將指出所有其他的項也有這個因子，此外，第二項還有因子 $\frac{273+t}{273}$；它對於大氣折射的影響是不可忽視的，因為 t 實際上可能達到 $\pm30^\circ$（有時還要大），此量可使第二項變化（在 $\pm30^\circ$ 時）十分之一，即如表所示，$\zeta=70^\circ$ 時達 $\pm0''.17$，$\zeta=75^\circ$ 時達 $\pm0''.41$，$\zeta=80^\circ$ 時達 $1''.40$。括弧中最後一項的 $\frac{1}{2}c\delta_0$ 不能取平均值 0.0001462，因在極端條件下當 $\zeta=80^\circ$ 時誤差可達 $0''.23$。

最後，注意大氣折射公式連同其他各項可表為（常這樣做）$\rho=z-\zeta=k\tan\zeta$ 的形式，其中係數 k 不僅與 p 及 t 有關 $\left(k=k_0\frac{p}{760}\times\frac{273}{273+t}\right)$，而且還與 ζ 有關，ζ 增加時它減小（因第二項，比它以後的項大，為負號）。在下表中給出 $p=760\ mm$，$t=0^\circ$C 時對於不同的 ζ 的 k_0 值，用角度秒及弧度表示。

ζ	k_0	k_0	ζ	k_0	k_0
0°	60″.23	0.0002920	60°	60″.04	0.0002911
10	60.23	2920	65	59.93	2906
20	60.22	2920	70	59.74	2896
30	60.21	2919	75	59.34	2877
45	60.17	2917	80	58.27	2825

§55. **大氣折射的更準確的計算**　爲要準確計算大氣折射必須知道對於不同高度 h 的光線折射率或空氣密度。當作計算的例子，我們利用 П. А. 莫耳查諾夫（Молчанов）所著的書"空氣學"第 365 頁"根據歐洲氣象台的觀測"的數據。對於 40 公里以下的不同的 h 給出了每立方米的空氣重量；空氣密度與它成比例，使得對每個 h 可以得到冬天及夏天的 $\frac{\delta_h}{\delta_0}$ 值；地面上夏天的溫度爲 $+14°.7$；冬天爲 $1°.7$，但冬天是指歐洲平均緯度的而不是蘇聯平均緯度的。40 公里以上的空氣層也不能忽略。對於它們可假定 $\delta_h = \delta_{h_0} \cdot e^{-\frac{h-h_0}{6.34}}$；此公式滿意地表示 δ_h，一直到 $h=40$ 公里，如果 $h_0=0$；假定此公式在 $\delta=0$，$\mu=1$ 的高度以下也爲正確。

首先可以改正 II_1 的值。我們取

$$\int_0^{\delta_0} \delta \frac{g}{g_0} dh \text{ 來代替} \int_0^{\delta_0} \delta dh \text{ 或 } \delta_0 \int_0^{\delta_0} \frac{\delta}{\delta_0} \cdot \frac{g}{g_0} dh \text{ 來代替 } \delta_0 \int_0^{\delta_0} \frac{\delta}{\delta_0} dh,$$

其中 g 爲高度 h 的那個地方的重力；因此所算出的 II_1 值的改正等於

$$\delta_0 \int_0^{\delta_0} \frac{\delta}{\delta_0}\left(1-\frac{g}{g_0}\right)dh \text{。}$$

計算指出（取夏冬兩季平均值），所算出的 II_1 值需要增加原值的 $\frac{1}{417}$；由表 3 與表 5 可見，此改正值在 $\zeta=80°$ 時等於 $0''.03$；係數 0.00125294 變爲 0.00125594。

爲了驗算起見，用兩個方法來計算某些積分：（1）用最簡單的數字積分法（梯形法）由 $h=0$ 積分到 $h=40$ 公里，以後的積分用所指出的外插公式計算，（2）由 $h=0$ 到 $h=11$ 公里用梯形法，以後用外插公式。在積分時應用下列簡單的定積分：

$$(x_0)=\int_{x_0}^{\infty} e^{-ax}\,dx=\frac{1}{a}e^{-ax_0};$$

$$(x_1)=\int_{x_0}^{\infty} xe^{-ax}\,dx=(x_0)\left(x_0+\frac{1}{a}\right);$$

$$(x_2)=\int_{x_0}^{\infty} x^2e^{-ax}\,dx=x_0^2(x_0)+\frac{2}{a}(x_1);$$

$$(x_3)=\int_{x_0}^{\infty} x^3\,e^{-ax}\,dx=x_0^3(x_0)+\frac{3}{a}(x_2);$$

$$(x_4)=\int_{x_0}^{\infty} x^4\,e^{-ax}\,dx=x_0^4(x_0)+\frac{4}{a}(x_3);$$

等等。

由公式（57）可見，在它裏面有包含 Δ^2，Δ^3，Δ^4，…的積分；爲簡單起見，我們把它們記爲 (Δ^2)，(Δ^3)，(Δ^4)…等等。

我們有

$$(\Delta^2)=\int_1^{\mu_0}\left(\frac{h\mu}{R\mu_0}-\frac{\mu_0-\mu}{\mu_0}\right)^2\frac{d\mu}{\mu}=$$

$$=\int_1^{\mu_0}\frac{h^2}{R^2}\cdot\frac{\mu}{\mu_0^2}\cdot\frac{d\mu}{\mu}-2\int_1^{\mu_0}\frac{h}{R}\cdot\frac{\mu}{\mu_0}\cdot\frac{\mu_0-\mu}{\mu_0}\cdot\frac{d\mu}{\mu}+\int_1^{\mu_0}\left(\frac{\mu_0-\mu}{\mu_0}\right)^2\frac{d\mu}{\mu}\text{。}$$

在第一個積分中 $\frac{\mu}{\mu_0}$ 變化於 $(1-0.0006)$ 與 $(1-0.0003)$ 之間，又如以後的計算將要指出的，可在容許的誤差下取 $\frac{\mu}{\mu_0}=1$。

那麼
$$(A^2)_1=\int_1^{\mu_0}\frac{h^2}{R^2}d\mu=\frac{1}{R^2}\int_0^{\delta_0}h^2\,cd\delta;$$
應用部份積分法，得：
$$(A^2)_1=\frac{2c\delta_0}{R^2}\int_0^{\infty}h\frac{\delta}{\delta_0}dh=\frac{2c\delta_0}{R^2}(h_1)。$$
積分 (h_1) 及所有類似它的積分 $\int_0^{\infty}h^n\frac{\delta}{\delta_0}dh$ 都按照所指出的方法計算，即到 $h_0=40$ 公里或到 $h_0=11$ 公里用梯形法，以後按公式
$$\int_{h_0}^{\infty}h^n e^{-\frac{h-h_0}{6.34}}dh=e^{\frac{h_0}{6.34}}(x_n),$$
而在 (x_n) 中必須將 x_0 與 a 換成 h_0 與 $\frac{1}{6.34}$。

計算給出 (h_1) 的值如下：冬天爲 58.21 km^2 及 58.06；夏天爲 63.49 km^2 及 61.99。在表 4 中給出 (h_2)，(h_3)，等的值。

這樣，對於冬天：
$$(A^2)_1=c\delta_0\frac{2\times 58.2}{6378^2}=c\delta_0\,2.861\times 10^{-6}。$$

積分 (A^2) 的第二部份 $(A^2)_2$ 等於
$$-\frac{2}{R}\int_1^{\mu_0}h\cdot\frac{c\delta_0-c\delta}{\mu_0^2}d\mu=-\frac{2c\delta_0}{R\mu_0^2}\int_1^{\mu_0}h\left(1-\frac{\delta}{\delta_0}\right)d\mu。$$
對於後面那個積分用數字積分法得 0.00173 km，且因在所期望的準確限度內可取 $\mu_0=1$，所以
$$(A^2)_2=-c\delta_0\frac{2\times 0.00173}{6378}=-0.542\times 10^{-6}c\delta_0。$$

第三個積分 $(A^2)_3=\int_1^{\mu_0}\left(\frac{\mu_0-\mu}{\mu_0}\right)^2\frac{d\mu}{\mu}$ 不難得出它等於 $+c\delta_0\,0.028\times 10^{-6}$，如果在 $\log\mu$ 中注意到 $(1-\mu)^3$ 這一項。

這樣一來，整個積分
$$(A^2)=c\delta_0(2.861-0.542+0.028)10^{-6}=c\delta_0\,2.347\times 10^{-6}。$$
至於積分 (A^3)，(A^4)，… 等，則在可容許的誤差範圍內（在 $\zeta=80^\circ$ 時 $\ll 0''.01$）每個可以只限於多項式中的第一項。事實上
$$(A^n)=\int\frac{d\mu}{\mu}\left(\frac{h\mu}{R\mu_0}-\frac{\mu_0-\mu}{\mu_0}\right)^n=$$
$$=\int\frac{d\mu}{\mu}\left[\left(\frac{h\mu}{R\mu_0}\right)^n-n\left(\frac{h\mu}{R\mu_0}\right)^{n-1}\frac{\mu_0-\mu}{\mu_0}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{h\mu}{R\mu_0}\right)^{n-2}\left(\frac{\mu_0-\mu}{\mu_0}\right)^2-\cdots\right],$$

但在積分路徑上 $\frac{\mu_0-\mu}{\mu_0}=0.0003\,\theta$，其中 $0<\theta<1$；若爲書寫簡短起見，記 $\int\frac{d\mu}{\mu}\left(\frac{h\mu}{R\mu_0}\right)^n$ 爲 (h'_m)，則 $(A^n)=(h'_n)-n\theta\times0.0003(h'_{n-1})+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}(\theta\times0.0003)^2(h'_{n-2})-\cdots$，我們還看出，因 (h'_n) 被 R^n 除，故隨 n 的增加而迅速減小，因此對任意的 n 可以取 $(A^n)=(h'_n)$，這樣已經夠準確了。其次，在積分 (h'_n) 中，比值 $\frac{\mu}{\mu_0}$ 在積分限內變化於 $\frac{\mu_0}{\mu_0}=1$ 及 $\frac{1}{\mu_0}=1-0.0003$ 之間；因此若在整個路徑上令 $\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^n=1-\frac{1}{2}\times0.0003\,n$，則我們的誤差不超過原値的 $0.00015\,n$，並且我們將看出在積分 (h'_n) 很小的情況下，此誤差比大氣折射計算裏原定的準確度小得多。

再應用部份積分法，得

$$\int_1^{\mu_0}h^n\frac{d\mu}{\mu}=\Big|_1^{\mu_0}h^n\log\mu+\int_0^H n\log\mu\,h^{n-1}\,dh=n\int_0^H(\mu-1)\,h^{n-1}\,dh=nc\,\delta_0\int_0^H\frac{\delta}{\delta_0}h^{n-1}dh。$$

因此
$$(A^n)=\frac{n(1-0.00015n)}{R^n}c\delta_0\int_0^H\frac{\delta}{\delta_0}h^{n-1}\,dh=\frac{n(1-0.00015n)}{R^n}c\delta_0(h_{n-1})。$$

在下表中列出用上述方法計算出的積分 (h_{n-1}) 値。

表　4

	冬季		夏季		冬季		夏對冬
	1	2	1	2	40 km 以下	40 km 以上	
(h_1)	58.2	58.1	63.5	62.0	57.3	0.9	+8%
$10^{-1}(h_2)$	78.1	77.7	—	84.0	74.0	4.1	+8%
$10^{-2}(h_3)$	151.9	150.6	—	163.8	132.3	19.6	+9%
$10^{-3}(h_4)$	389.1	383.9	—	418.6	292.1	97.0	+9%
$10^{-4}(h_5)$	1239.3				742.3	497.0	

表中第 6、7 行的數字指出，高於 40 km 的大氣層對量 (h_n) 的影響隨 n 的增加而增加。爲進一步計算，取冬天的第一個値。

$$(A^3)=\frac{3(1-0.00045)}{R^3}c\delta_0\,78.1\times10=0.9027\times10^{-8}\,c\delta_0;$$

$$(A^4)=\frac{4(1-0.00060)}{R^4}c\delta_0\,151.9\times10^2=0.3670\times10^{-10}\,c\delta_0;$$

$$(A^5)=\frac{5(1-0.00075)}{R^5}c\delta_0\,389.1\times10^3=0.1842\times10^{-12}\,c\delta_0;$$

$$(A^6)=\frac{6(1-0.00090)}{R^6}c\delta_0\,1239\times10^4=0.1103\times10^{-14}\,c\delta_0。$$

因此，公式(57)中乘以 $\tan\zeta\sec^{2i}\zeta$ 的係數得出如下：

$$i=1;\quad -c\delta_0\cdot\frac{273+t}{273}\cdot0.00125594+\frac{1}{2}(c\delta_0)^2-c\delta_0\cdot\frac{1}{2}\cdot2.317\times10^{-6}.$$

$$i=2;\ +c\delta_0\ \frac{2}{3}[2.317+0.0090+0.000]\times10^{-6}=+c\delta_0\,3.534\times10^{-6},$$

$$i=3;\ -c\delta_0\cdot\frac{15}{6}[0.9027\times10^{-8}+\frac{3}{2}\cdot0.367\times10^{-10}]=-c\delta_0\,0.02270\times10^{-6},$$

$$i=4;\ +c\delta_0\cdot\frac{105}{24}[0.367\times10^{-10}+2\cdot0.184\times10^{-12}]=+c\delta_0\,0.01622\times10^{-8},$$

$$i=5;\ -c\delta_0\cdot\frac{945}{120}[0.1842\times10^{-12}+\frac{5}{2}\cdot0.110\times10^{-14}]=-c\delta_0\,0.01472\times10^{-10},$$

$$i=6;\ +c\delta_0\cdot\frac{231}{16}[0.1103\times10^{-14}]=+c\delta_0\,0.01593\times10^{-12}。$$

把得到的各個積分值代入大氣折射公式(57)得:

$$\begin{aligned}z-\zeta=c\delta_0(1-0.0001462)\Big[\tan\zeta-\frac{273+t}{273}\cdot0.00125594\tan\zeta\sec^2\zeta+\\+\frac{1}{2}c\delta_0\tan\zeta\sec^2\zeta-1.17\times10^{-5}\tan\zeta\sec^2\zeta\Big]+\\+c\delta_0\,0.03534\times10^{-4}\tan\zeta\sec^4\zeta-c\delta_0\,0.02270\times10^{-6}\tan\zeta\sec^6\zeta+\\+c\delta_0\,0.01622\times10^{-8}\tan\zeta\sec^8\zeta-c\delta_0\,0.01472\times10^{-10}\tan\zeta\sec^{10}\zeta+\\+c\delta_0\,0.01593\times10^{-12}\tan\zeta\sec^{12}\zeta。\quad(60)\end{aligned}$$

由此公式可看出，大氣折射値與溫度 t 和壓力 p 有關。這不僅是因爲公共係數 $c\delta_0=$ $=cD\cdot\frac{p}{760}\cdot\frac{273}{273+t}$，而且也因爲方括弧中第二項還有因子 $\frac{273+t}{273}$，第三項還有與 p, t 有關的 $\frac{1}{2}c\delta_0$。

爲要指出，對於不同的 ζ 的大氣折射怎樣由個別的項組成，令 $t=0°$, $p=760\,mm$, $cD(1-0.0001462)=60''.30$，而算出對於不同的 ζ 大氣折射的值。

於是

$$\begin{aligned}z-\zeta=60''.30\tan\zeta-6''.6987\times10^{-2}\tan\zeta\sec^2\zeta+2''.131\times10^{-4}\tan\zeta\sec^4\zeta-\\-1''.369\times10^{-6}\tan\zeta\sec^6\zeta+0''.978\times10^{-8}\tan\zeta\sec^8\zeta-\\-0''.888\times10^{-10}\tan\zeta\sec^{10}\zeta+0''.961\times10^{-12}\tan\zeta\sec^{12}\zeta。\quad(61)\end{aligned}$$

在表 5 中也給出普耳科夫表所載的大氣折射，以及兩種大氣折射的差，爲了與普耳科夫表一致，取係數爲 60''.3。

有了大氣折射級數的各項的值，事實上可以相信，在推導公式時我們所作的各種簡化是完全不錯的，我們所忽略的量眞地很小。由表可以看出，具有 $\sec^{2i}\zeta$ 的項的值是如何地隨着 i 與 ζ 的增加而增加，由 $\sec^4\zeta$ 開始，也就是(參看表 4)隨着高於 40 km 的大氣上層的密度的變化而增加；我們還注意到，在由大氣的冬天性質過渡到夏天性質時，由 $\sec^4\zeta$ 開始的項增大了 8—9%，即當 $\zeta=75°$ 時只增加 0''.013，而當 $\zeta=80°$ 時則增加 0''.10 (可能是已經沒有可忽略的項了)。

表　5

tan ζ	10^{0}	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}	10^{-12}	大氣折射	普耳科大表	差
	1	$\sec^2\zeta$	$\sec^4\zeta$	$\sec^6\zeta$	$\sec^8\zeta$	$\sec^{10}\zeta$	$\sec^{12}\zeta$			
	60″.300	−6″.6987	+2″.131	−1″.369	+0″.078	−6″.888	+0″.961			
ζ										
10°	10″.633	−0″.012						10″.621	″.62	0″.00
20	21.947	.028						21.919	.92	.00
30	34.814	.052						34.762	77	+.01
45	60.300	.134	+ 0.001					60.167	.17	.00
60	104.443	.461	.006					103.985	.99	.00
65	129.314	0.801	.014					128.524	52	.00
70	165.673	1.573	.043	−0.002				164.141	.13	−.01
75	225.043	3.732	0.177	.017	+ 0.002			221.473	.47	.00
80	341.977	12.599	1.329	.283	.067	− 0.020	+ 0.007	330.478	.50	+.02
81	380.719	17.282	2.247	0.589	.172	.064	.028	365.231	.275	+.04
82	429.057	24.608	4.042	1.341	0.494	0.232	.130	407.542	.606	+.06
83	491.104	36.733	7.868	3.403	1.637	1.001	0.739	460.202	.19	−.01
84	573.716	58.331	16.983	9.986	6.53	5.42	5.49			
85	689.235	−100.796	+42.212	−35.70	+33.57	−40.13	+57.2			

§56. 大氣折射係數的測定 任何一個大氣折射的理論，其公式或者是我們所推出的那個形式，

$$\rho=z-\zeta=$$
$$=C\cdot\frac{p}{760}\cdot\frac{273}{273+t}(c_0\tan\zeta+c_1\tan\zeta\sec^2\zeta+c_2\tan\zeta\sec^4\zeta+\cdots),$$

或者如在另一理論中的形式：

$$\rho=z-\zeta=C\cdot\frac{p}{760}\cdot\frac{273}{273+t}(c_0'\tan\zeta+c_1'\tan^3\zeta+c_2'\tan^5\zeta+\cdots)。$$

C 根據以前的符號是 cD，而係數 c_0、c_1，c_2 或 c_0'，c_1'，c_2' 的值，與各理論所取的級數形式有關，並視 μ 或 δ 和高度 h 的關係而定；係數 C 與理論的性質無關，可以獨立地測定。C 在標準狀況下，即 $p=760\ mm$，$t=$ $=0°$ 時，與空氣的折射率有關，可以由物理實驗室中的實驗來定出，但天文學家寧願由天文觀測來測定，以便改正大氣折射的影響並使整個理論向前發展。

測定 C 的基本想法在於：測量恆星在上中天時的天頂距 ζ_s，當時大氣折射的影響不大，又測量下中天時的天頂距 ζ_n，是時大氣折射的影響大得多；結合 ζ_s 和 ζ_n，就可以定出 C。在下中天時

$$\zeta_n+Cf_n=z_n=180°-\varphi-\delta;$$

在天頂之南上中天時：

$$z_s=\zeta_s+Cf_s=\varphi-\delta,$$

而在天頂之北上中天時

$$z_s=\zeta_s+Cf_s=\delta-\varphi;$$

Cf_s 及 Cf_n 為大氣折射；f_s 及 f_n 的值由大氣折射的理論可知。然而必須考慮到，緯度 φ 和恆星赤緯 δ 在變化：δ 隨光行差，歲差和章動而變化，在後面就要看到。因此令 φ_0 為某平均緯度；在恆星上中天時觀測緯度等於 $\varphi_0+\Delta\varphi_s$，而下中天時等於 $\varphi_0+\Delta\varphi_n$；此兩時刻的赤緯為 $\delta_0+\Delta\delta_s$ 和 $\delta_0+\Delta\delta_n$。

則有：
$$\zeta_n+Cf_n=180°-\varphi_0-\Delta\varphi_n-\delta_0-\Delta\delta_n,$$

$$\zeta_s+Cf_s=\varphi_0+\Delta\varphi_s-\delta_0-\Delta\delta_s\text{。}$$

相減得

$$\zeta_н-\zeta_s+C(f_н-f_s)=180^\circ-2\varphi_0-(\Delta\varphi_н+\Delta\varphi_s)-(\Delta\delta_н-\Delta\delta_s)\text{。}\quad(62)$$

$(\Delta\varphi_н+\Delta\varphi_s)$由對當地緯度的變化所進行的特別觀測而得出；$(\Delta\delta_н-\Delta\delta_s)$可根據光行差，歲差和章動的理論算出。若上中天發生在天頂之北，則第二方程式爲，

$$\zeta_s+Cf_s=\delta_0+\Delta\delta_s-\varphi_0-\Delta\varphi_s,$$

則相加後得

$$\zeta_н+\zeta_s+C(f_н+f_s)=180^\circ-2\varphi_0-(\Delta\varphi_н+\Delta\varphi_s)-(\Delta\delta_н-\Delta\delta_s)\text{。}\quad(63)$$

在兩種情形中都得到包含兩個未知量 φ_0 和 C 的方程式。由一些 δ 不同的恆星，在不同的溫度和氣壓下進行的這種觀測，C 和 φ_0 就可以用最小二乘法定出來。爲了可靠地測定 C，必須使這些方程式中 (63) 裏的和數$(f_н+f_s)$ 及 (62)裏的差數$(f_н-f_s)$彼此相差得很多，也就是要使所觀測的恆星有各種不同的天頂距。然而用低於 $\zeta=80^\circ$ 的恆星的觀測是不合理的，因在 $\zeta>80^\circ$ 時不可能把在觀測時刻上層空氣的影響計算在內，而它們的影響又不能忽略；也就是說，理論的不完備會影響到係數 C 的數值的測定。

此外，既然有用物理學建立起來的 μ 與 δ 的關係$(\mu-1=c\delta)$，則同時就採用那個在物理研究中被採用的空氣膨脹係數$\left(\frac{1}{273}\right)$，而不需要(也不可能)尋找其他的。

爲實際應用而編造的各種大氣折射表，若天頂距不低於 80°，在理論上的差別，倒不及係數 C 的差別爲大。這在表 6 中可以看出，其中在 П, X, P, Б 各行中給出 $p=760\,mm$, $t=0°C$ 時的大氣折射值，П 爲根據普耳科夫表，X 爲哈爾切爾表(Харцер)，P 爲拉多表(Радо)，Б 爲德巴里亞 (де Баллял) 表；在 P′ 行給出拉多的大氣折射乘上 0.99729 的值，在 Б′ 行中給出德巴利亞大氣折射乘上 1.00223 的值。

可以看出，П 與 P 間及 П 與 Б 間的差別是由於係數的差別，因爲

一乘上常數因子，差別就微不足道了，理論的差別到 $\zeta>80^\circ$ 時才顯出來，在 §55 中的討論已經闡明這一點。

表 6

ζ	II	X	P	B	P′	B′
10°	10″.62	10″.62	10″.65	10″.60	10″.62	10″.62
20	21.92	21.92	21.98	21.87	21.92	21.92
30	34.77	34.76	34.86	34.69	34.77	34.76
45	60.17	60.17	60.33	60.03	60.17	60.16
60	103.99	103.98	104.26	103.75	103.98	103.98
65	128.52	128.52	128.87	128.23	128.52	128.52
70	164.13	164.14	164.58	163.80	164.13	164.17
75	221.47	221.47	222.07	221.00	221.47	221.49
80	330.50	330.50	331.40	329.76	330.50	330.50
81	365.28	365.27	366.29	無	365.30	—
82	407.61	407.63	408.77		407.66	
83	460.19	460.27	461.56		460.31	
84	527.06	527.21	528.79		527.27	
85	614.59	614.79	616.53		614.86	

57. 普耳科夫大氣折射表 天文實際工作中，最常用的是普耳科夫的大氣折射表。此表是由基里金根據他在 1866 年發表的大氣折射理論所造的。

此表在 1870 年出版，然後在 1905 年無改變無補充地再版，在 1930 年又再版，也沒有改變，但有些補充。

在數學方面，基里金的理論要比本書中所講的複雜得多，但他的目的不僅要算大氣折射到天頂距 80°，而要算到 90°；這使數學部份複雜得多，此外，其中的物理數據也不同：按照舊的研究，用 $\mu^2-1=c\delta$，而不是更準確的測量所證實了的 $\mu-1=c\delta$，所用的許多量的值都是根據十九世紀中葉所測定的。然而可以容易地建立這裏所講的理論和公式(60)和普耳科夫表的平行關係。我們要討論的是第三版，並用此版中各表的號碼（簡寫爲表 I, II, …）。

因大氣折射公式由一些不同的因子所組成，故最方便的是要使表能給出大氣折射的對數值爲各因子的對數和，並最好避免有雙項目的表。對數值以五位小數爲單位。大氣折射的標準狀況採用 $p=751.5\,mm$，$t=9^\circ.5$；這是對應於中歐全年的氣壓和溫度的平均值的，所以對應於此狀況的大氣折射有時稱爲平均大氣折射；空氣膨脹係數根據天文的測定採用 1:271.0。

因此在我們的公式中，必須以 $\frac{751.5}{760.0}\cdot\frac{p}{751.5}$ 代替 $\frac{p}{760}$ 或根據公式(53)

$$\log\frac{p}{760}=\log\frac{751.5}{760.0}+\log\frac{b}{751.5}-7.1T-115.1\cos 2\varphi-13.6h-7.2\pi$$

(以第五位小數爲單位)，其中 b 是氣壓計水銀柱高度的毫米數；在表 IV 中給出 $B=$ $=\log\left(\frac{b}{751.5}\right)$。在表 V 中給出 $T=7.1\tau$，其中 τ 爲溫度。在普耳科夫測定大氣折射係數的時候，平均蒸汽壓取爲 5.5；因此在表 VI 中代換 -7.2π 爲 $C=-7.2(\pi-5.5)$；不用化成緯度 45° 時重力的方法而在表 VII 中給出化 D 到普耳科夫緯度的重力。除拔海高度外，此表一切都顧到了，拔海高度必須在改正氣壓計高度 b 時加以考慮。根據基里金的理論，對於大的天頂距，和數 $(B+T)$ 還必須乘上 A（比 1 稍大），A 隨 ζ 而變化（表 1）。

這樣一來，公式(53)中的 $\log\frac{p}{760}$ 變爲

$$\log\frac{751.5}{760.0}+A(B+T)+C+D。$$

至於溫度的影響，爲要得到普耳科夫公式，代換 $\frac{273}{273+t}$ 爲

$$\frac{271}{271+t}=\frac{271}{271+9.3}\cdot\frac{271+9.3}{271+t},$$

因此

$$\log\frac{271}{271+t}=\log\frac{271}{271+9.3}+\log\frac{271+9.3}{271+t}。$$

表 III 給出 $\log\frac{271+9.3}{271+t}$，其符號爲 γ。

這樣一來，公式(60)成爲

$$大氣折射=cD\frac{751.5}{760.0}\cdot\frac{271}{271+9.3}\cdot 10^{A(B+T)+C+D+\gamma}(1-0.0001462)\times$$

$$\times\tan\zeta\left[1-\frac{271+t}{271+9.3}0.00129\sec^2\zeta+\cdots\right]。$$

爲了去掉方括弧中 t 的影響，注意此式可以近似地表爲乘積的形式

$$[1-0.00129\sec^2\zeta+\cdots]\left[1-\left(\frac{271+t}{271+9.3}-1\right)0.00129\sec^2\zeta\right];$$

第二個方括弧又可以近似地表爲：

$$\left[1+\left(\frac{271+t}{271+9.3}-1\right)\right]^{-0.00129\sec^2\zeta}=\left[\frac{271+t}{271+9.3}\right]^{-0.00129\sec^2\zeta}=\left[\frac{271+9.3}{271+t}\right]^{0.00129\sec^2\zeta}。$$

又因 $10^{\gamma}=\frac{271+9.3}{271+t}$，故

$$\frac{271+9.3}{271+t}\left[1-\left(\frac{271+t}{271+9.3}-1\right)0.00129\sec^2\zeta\right]=\left(\frac{271+9.3}{271+t}\right)^{1+0.00129\sec^2\zeta},$$

且此式的對數等於 $(1+0.00129\sec^2\zeta)\gamma$。

在普耳科夫的表 1 中的 λ 值，與 $1+0.00129\sec^2\zeta$ 相差很小；它們之間的不大的差別是由數學理論的差別產生。

這樣一來

$$大氣折射=cD\frac{751.5}{760.0}\cdot\frac{271}{271+9.3}(1-0.0001462)\times$$
$$\times[1-0.00129\sec^2\zeta+\cdots]\tan\zeta\cdot 10^{A(B+T)+C+D+\lambda\gamma}。$$

記 $\tan\zeta$ 前面的值的對數爲 μ，就得到普耳科夫的大氣折射公式：

$$大氣折射=\mu+\log\tan\zeta+A(B+T)+C+D+\lambda\gamma。$$

表 I 給出對於不同的 ζ 的 λ 值和 μ 值，此外表 II 給出 ζ 由 0° 到 90° 的每一分的 $\mu+$ $+\log\tan\zeta$ 的值。

普耳科夫表的最後一版還包含每天每小時風力，星色對大氣折射的影響的表，這些表實質上是由哈爾切爾的大氣折射表取出的。

§58. 實際的大氣折射 實際上，大氣不完全是平靜的，而且折射率相同的層也不是位於水平面上。

設天文台在海岸上；白天，陸地上的空氣要比海面上熱些，故密度和在陸地面上相同的層就要位於海面上的某一高度；晚上恰好相反。當天文台附近的平地上，吹着旋風或反旋風，則空氣的等密度層就不是在水平面上，而觀測地的鉛垂線也就不與等密度面的法線相合。

設空氣的等密度層都在同心的球面上，但通過觀測者的公共法線，在方位角爲 A 處與垂直線的交角爲 x。此時正常的大氣折射的理論還是可以用，但只是在地平經度爲 A 時，爲要計算天頂距 ζ 的大氣折射應取宗數 $\zeta-x$，而不是 ζ；在地平經度爲 $A+180^\circ$ 時應取 $\zeta+x$，在中介的地平經度則取 $\zeta+x$ 及 $\zeta-x$ 的某種平均值。在這些假設條件下，可以假定 x 爲很小的角，大氣折射對於正常的理論值 $\rho=k\tan\zeta$ 的偏差 $\Delta\rho=x\dfrac{d\rho}{d\zeta}=xk\sec^2\zeta$。然而所有的層都傾斜的假定和實際相去很遠；在旋風或反旋風通過時，大氣下層是有傾斜，但隨着高度的增加而逐漸消失，因此實際的 $\Delta\rho$ 值要比推出的值小。

此問題的詳細研究指出，大氣折射的這種地方反常性，與大氣高層的情況有關，不可能很大，很可能不超過 $0''.1$，通常就把它忽略了。相反地，更重要的地方反常是由於：儀器附近的地不平，各種不同的不太遠的物體，例如，河流，高建築物(燃暖的或不暖的)等，在白天被太陽曬

熱到不同程度，而在晚上放散出熱。由於這個原因，大氣最低層的等密度層不是水平的，因而得出對正常的大氣折射的偏差。

除此之外，所謂室內大氣折射也很重要，它是產生於擱儀器的屋子內的空氣溫度與室外不同，而室內溫度也不是各處一樣，使得等密度層不是水平的。室內大氣折射當然與當地條件有密切關係。對於它很難研究，在最近幾十年來大家想把儀器室的天窗加寬到兩米或更多，使室內大氣折射減弱。

§59. 大氣折射較差　由於大氣折射，天體在天空的相對位置以及角徑大的天體（如太陽月球）表面上各點的相對位置便發生變化。在彼此很靠近的天體的情形中，此大氣折射的影響稱爲大氣折射較差。

令 S_1, S_2 爲在同一地平經圈上的兩個天體的眞位置；S_1', S_2' 爲受大氣折射影響後的位置；z_1, z_2, ζ_1, ζ_2 爲它們的天頂距；設大氣折射形式爲 $z-\zeta=k\tan\zeta$（參看§54末），則有：

$$z_1=\zeta_1+k_1\tan\zeta_1;\quad z_2=\zeta_2+k_2\tan\zeta_2,$$

因此

$$z_1-z_2=\zeta_1-\zeta_2+k_1\tan\zeta_1-k_2\tan\zeta_2\text{。}$$

若恆星彼此很靠近，則可以使 $k_1=k_2=k$，所引起的誤差是可以容許的，因得

$$z_1-z_2=\zeta_1-\zeta_2+k(\tan\zeta_1-\tan\zeta_2)=\zeta_1-\zeta_2+k\frac{\sin(\zeta_1-\zeta_2)}{\cos\zeta_1\cos\zeta_2}=$$
$$=\zeta_1-\zeta_2+k(\zeta_1-\zeta_2)\sec^2\zeta,$$

其中 ζ 或爲 ζ_1，或爲 ζ_2。且

$$\zeta_1-\zeta_2=(z_1-z_2)(1-k\sec^2\zeta)\text{。}$$

這表示，由於大氣折射，距離 (z_1-z_2) 在豎直方向縮減，比例係數爲 $(1-k\sec^2\zeta)$，爲要由視距離$(\zeta_1-\zeta_2)$得出眞距離(z_1-z_2)，需要把$(\zeta_1-\zeta_2)$乘上 $(1+k\sec^2\zeta)$ 或者把$(\zeta_1-\zeta_2)$加上 $k(\zeta_1-\zeta_2)\sec^2\zeta$，或加上 $k(\zeta_1-\zeta_2)+k(\zeta_1-\zeta_2)\tan^2\zeta$。這樣一來，準確到$(z_1-z_2)$的第一次冪有

$$\left.\begin{aligned} z_1-z_2 &= (\zeta_1-\zeta_2)(1+k\sec^2\zeta)= \\ &= (\zeta_1-\zeta_2)+k(\zeta_1-\zeta_2)+k(\zeta_1-\zeta_2)\tan^2\zeta, \\ \zeta_1-\zeta_2 &= (z_1-z_2)(1-k\sec^2\zeta)= \\ &= (z_1-z_2)-k(z_1-z_2)-k(z_1-z_2)\tan^2 z。\end{aligned}\right\} \qquad (64)$$

這裏 k 當然表示不名數，而(z_1-z_2)及$(\zeta_1-\zeta_2)$以角度來量；$k=k_0\cdot\frac{p}{760}\times\times\frac{273^\circ}{273^\circ+t^\circ}$；$k_0$ 爲很小的值，並隨 ζ 作微小變化(參看§54 末)。

$(\zeta_1-\zeta_2)$ 和 $(\zeta_1-\zeta_2)$的改正量成正比，這到甚麼程度還是可以容許的，是要由所期望的計算準確度來决定，也由天頂距 ζ 決定。這由下表可見，在表中給出 ζ 在 70° 和 80° 附近的平均大氣折射；第三行給出大氣折射較差；而在第四行中爲整理均勻後的較差；第五行中載出第四行的與實際值間的誤差，此誤差由於承認較差與 $\zeta-\zeta_0$ 成正比而產生；我們將看出：在 $\zeta_0=70^\circ$，$\zeta-\zeta_0=10'$ 時，此誤差達到 $0''.02$，而在 $\zeta_0=80^\circ$ 時，對於 $\zeta-\zeta_0=5'$ 已經有這樣的誤差了；在 $\zeta_0=60^\circ$ 時對於 $\zeta-\zeta_0$ 在 $20'$ 左右才有這樣的誤差。當可容許的誤差大時，$\zeta-\zeta_0$ 的範圍當然也大。

ζ	2	3	4	5
69° 30′	152″.76	−4″.10	−4″.19	+0″.09
45	154.79	2.07	2.09	.02
70 0	156.86	0.00	0.00	.00
15	158.98	2.12	2.09	.03
30	161.14	+4.28	+4.19	+ .09
79 50	310.56	−4.95	−5.02	+0.07
55	313.02	2.49	2.51	.02
80 0	315.51	0.00	0.00	.00
5	318.04	2.53	2.51	.02
10	320.61	+5.10	+5.02	+0.08

大氣折射也使 ζ 相同的恆星間的距離變化。令(圖 38)S_1, S_2 爲天頂距相等的兩個恆星，$z=ZS_1=ZS_2$；S_1', S_2'爲受大氣折射變化後的位置，則 $S_1S_1'=S_2S_2'=z-\zeta=k\tan\zeta$。令 M 和 M' 爲 S_1S_2 和 $S_1'S_2'$ 的中點；

由於圖形的對稱性，ZM' 和 M 在同一地平經圈上，在 M, M' 處的角爲直角。在 Z 處的角記爲 $2A$。因此 $\sin MS_1 = \sin MS_2 = \sin z \sin A$ 及 $\sin M'S_1' = \sin M'S_2' = \sin \zeta \sin A$。

若在可容許的誤差的條件下（參看 § 62）可以令 $\sin MS_1 = MS_1$，因此，$\sin M'S_1' = M'S_1'$，則 $S_1S_2 = 2MS_1 = 2\sin A \sin z$ 及 $S_1'S_2' = 2M'S_1' = 2\sin A \sin \zeta$，故 $\dfrac{S_1S_2}{S_1'S_2'} = \dfrac{\sin z}{\sin \zeta}$，

則
$$\frac{S_1S_2 - S_1'S_2'}{S_1'S_2'} = \frac{\sin z - \sin \zeta}{\sin \zeta} = \frac{(z-\zeta)\cos \zeta}{\sin \zeta} =$$
$$= \frac{k \tan \zeta \cos \zeta}{\sin \zeta} = k。$$

圖 38.

由此
$$S_1S_2 - S_1'S_2' = kS_1'S_2', \quad S_1S_2 = (1+k)S_1'S_2', \tag{65}$$
即，觀測到的兩個靠近的恆星的水平距離必需乘上 $(1+k)$ 或加上 $kS_1'S_2'$ 才能把大氣折射對它的影響消除。

考慮到大氣折射較差對水平距離和垂直距離的影響，可以說：由於它使得（1）所有的距離 r，無論它們的方向爲何，都縮短了 kr 那麼多，（2）除此之外，垂直距離 h 也縮短了 $hk\tan^2\zeta$，其中 ζ 爲天球上一點的天頂距，相對於這一點正在研究另外一點的位置。因此（圖 39），若對於天頂距爲 ζ 的恆星 S_0 而言有另外一個恆星位於半徑爲 r 的圓上（實圓），則由於大氣折射（1）半徑 r 變成 $r' = r - kr$（虛圓）及（2）半徑 r' 在垂直方向均勻地收縮而變成了橢圓：長徑在水平方向，等於 $2r'$，短徑在垂直方向，等於 $2r' - 2r'k\tan^2\zeta$。

在圖 39 上（因爲區域很小，可設爲平面），令 S_0Z 爲向天頂的方向；HH 爲垂直於 S_0Z 的弧；S_0P 爲向極的方向，S 爲恆星在沒有大氣折射影響時所在的地方，S' 是半徑爲 r' 的圓上在 SS_0' 直線上的點；$S'\bar{S}D$ 垂直於 HH；$\bar{S}$ 爲恆星 S 的視位置；視距離爲 $S_0\bar{S} = \bar{r}$。可以認爲圖 39 或者表示由裏面看到的西半天球的一部份，正如在地球上看天空一樣，或

Z
P
P'
S
S'
$\bar{S}$
A
Q'
H
D
S_0
H

圖 39.

者爲由外面看到的東半天球的一部份。在第一種情形中，星位角 $PS_0Z=q$，位置角 $PS_0S=p$ 及 $PS_0\bar{S}=\bar{p}$ 認爲由 S_0P 反時針方向旋轉，在第二種情形中爲順時針方向。

設 $\bar{S}A$ 垂直於 S_0S'；角 $S_0S'D=ZS_0S'=p-q$。只考慮 k 的一次項，忽略 k 的高次項，有：

$$S'A=S'\bar{S}\cos(p-q);$$
$$\bar{S}A=S'\bar{S}\sin(p-q);$$
$$S_0A=S_0\bar{S}=\bar{r};$$

$$S'\bar{S}=S'D\cdot k\cdot\tan^2\zeta=r'\cos(p-q)k\tan^2\zeta=\bar{r}\cos(p-q)k\tan^2\zeta。$$

因此

$$r'=S_0A+AS'=S_0\bar{S}+S'\bar{S}\cos(p-q)=\bar{r}+\bar{r}k\tan^2\zeta\cos^2(p-q)。$$

所以 $$r=r'(1+k)=[\bar{r}+\bar{r}k\tan^2\zeta\cos^2(p-q)](1+k)$$

或

$$r=\bar{r}+\bar{r}k[1+\tan^2\zeta\cos^2(p-q)]。\tag{66}$$

另外，小角 $\bar{S}S_0S'=\frac{\bar{S}A}{\bar{r}}=k\tan^2\zeta\cos(p-q)\sin(p-q)$。

因此

$$ZS_0S=p-q=ZS_0\bar{S}-SS_0S'=(\bar{p}-q)-k\tan^2\zeta\cos(p-q)\sin(p-q)。$$

所以

$$p=\bar{p}-k\tan^2\zeta\cos(p-q)\sin(p-q)。\tag{67}$$

在同樣的準確程度下，可以在 sin 與 cos 的符號內把 p 換成 $\bar{p}$；則

$$\left.\begin{aligned}r&=\bar{r}+\bar{r}k[1+\tan^2\zeta\cos^2(\bar{p}-q)],\\p&=\bar{p}-k\tan^2\zeta\cos(\bar{p}-q)\sin(\bar{p}-q)。\end{aligned}\right\}\tag{68}$$

角 q 可由恆星——天頂——天極所組成的三角形算出，而 $\bar{p}$ 與 $\bar{r}$ 由觀測得出(參看後面)。

必須記住，在東半天球上，$180°<q<360°$，在西半球 $0°<q<$ $<180°$。

大氣折射不僅變化 S_0S 的方向，也變化了 S_0 到天極的方向；可以用幾何方法來考慮，在最後的公式中若令 $p=0$；則

$$\bar{p}_0=k\tan^2\zeta\cos(-q)\sin(-q)=-k\tan^2\zeta\cos q\sin q\text{。}$$

因大氣折射而生變化的到天極的方向，用虛線 S_0P' 表示。

大氣折射也變化了周日平行圈的方向；在公式中代入 $p=90°$，則

$$90°=\bar{p}-k\tan^2\zeta\cos(90°-q)\sin(90°-q),$$

由此

$$\bar{p}=90°+k\tan^2\zeta\cos q\sin q\text{。}\tag{69}$$

因大氣折射而生變化後的周日平行圈用虛線 S_0Q' 表示；它不垂直於 S_0P，更不垂直於 S_0P'；它向着赤經增加的方向偏轉(圖中繪的是西半天球)。

實際上，視周日平行圈(在赤經增加的方向，卽與周日運動相反)與由恆星 S_0 到恆星 S 的視方向間的交角，卽 $\bar{S}S_0Q'$，也在變化。此交角認爲由 S_0Q' 按反時針方向到 $S_0\bar{S}$ (在圖 39 中此角大於 270°)。爲了改正大氣折射的影響，必須把直線 $S_0\bar{S}$ 按反時針方向轉一角度，根據公式(67)應轉的角度爲 $k\tan^2\zeta\cos(p-q)\sin(p-q)$，而直線 S_0Q' 應轉的角度根據公式(69)爲 $k\tan^2\zeta\sin q\cos q$。因此所量到的角度 $Q'S_0\bar{S}$ 必須減去

$$[k\tan^2\zeta\cos(p-q)\sin(p-q)-k\tan^2\zeta\sin q\cos q]\text{。}$$

所以，方向 S_0S 的眞位置角 p 爲

$$p=90°+Q'S_0\bar{S}-k\tan^2\zeta\,[\cos(p-q)\sin(p-q)-\sin q\cos q]$$

或

$$p=90°+Q'{}_0S\bar{S}-k\tan^2\zeta\sin(p-2q)\cos p\text{。}$$

所量到的距離 $S_0\bar{S}=\bar{r}$ 根據公式(68)改正。

若在觀測時欲測量二星的坐標差$\alpha-\alpha_0$及$\delta-\delta_0$，則使測微器中的a線與視周日平行圈重合，在恆星經過垂直於a線的b線時進行觀測，用螺旋移動第三條與a線平行的可移動的c線而測量恆星的視周日平行圈的差，即赤緯差$\delta-\delta_0=\varDelta\delta$。顯然，在此情況下，所測量的向量的位置角很小，等於$k\tan^2\zeta\cos q\sin q$；因此爲要得到眞正的$\varDelta\delta$，必須在測到的$\varDelta\bar{\delta}$上根據公式(66)加上$\varDelta\bar{\delta}\,k\,[1+\tan^2\zeta\cos^2(q-k\tan^2\zeta\sin q\times\times\cos q)]$，則到所取的準確度

$$\varDelta\delta=\varDelta\bar{\delta}+\varDelta\bar{\delta}\,k\,[1+\tan^2\zeta\cos^2 q]。$$

至於α，則若兩星有相同的α，則它們同時經過弧S_0P'，但經過b線時，北面的星要比南面的早$\dfrac{k\tan^2\zeta\sin q\cos q(\delta_n-\delta_s)}{15\cos\delta}$秒的時間，其中$(\delta_n-\delta_s)$用角度秒表示。因此若由觀測得到北面的星經過時刻爲$T_n$，南面的爲$T_s$，則爲要去掉大氣折射對於$(\alpha_n-\alpha_s)$的影響，必須把$\dfrac{k}{15}\times\times\tan^2\zeta(\delta_n-\delta_s)\sin q\cos q\sec\delta$加於$T_n$，所以

$$\alpha_n-\alpha_s=T_n-T_s+\frac{\delta_n-\delta_s}{15}k\tan^2\zeta\sin q\cos q\sec\delta。$$

§60. 大面積的大氣折射較差 目前應用照相拍攝面積由$2^\circ\times2^\circ$到$5^\circ\times5^\circ$甚至更大的星空，目的是要準確地測量恆星的相對坐標。藉助於測量儀器可測出恆星在照片上的直角坐標x與y，並由此計算出它們的相對的球面坐標❶。然而必須先去掉大氣折射對量到的坐標x與y的影響。此時只考慮到與x及y成正比的大氣折射是不夠的，必須還考慮更高的，大氣折射較差的第二項。爲了推出它們，我們採用泰爾納的方法，但作了一些改變，這個方法是在1897年發表的，到現在爲止，它在所有這種方法中，仍以其細緻性和嚴格性見稱。

恆星在照片上的分佈，可以看作恆星在由天球中心投影於天球上某一O點的切面上的分佈。和O點對應的是所謂的照片上的光學中心。令圖40表示由外面看到的天球切面的樣子。天球中心C必須想像爲在圖的平面的垂線上，並且在此平面的底下；我們令天球半徑CO等於1。Z點爲天頂在此平面上的投影。在照片上取直線坐標系，O爲原點，坐標軸爲：$+v$，在OZ的方向；$+u$，與v軸垂直而向讀者的右方；u，v的單位都是天球半徑，即在圖中$S(u,v)$爲某恆星受大氣折射影響後在照片上的位置，設$S'(u',v')$爲沒有大氣折射時恆星的位置；

❶ 參看 С. Н. 勃拉日哥，實用天文學教程，蘇聯技術理論書籍出版社1940年出版，與 Е. Я. Бугославская，照相天體測量學，1947年。

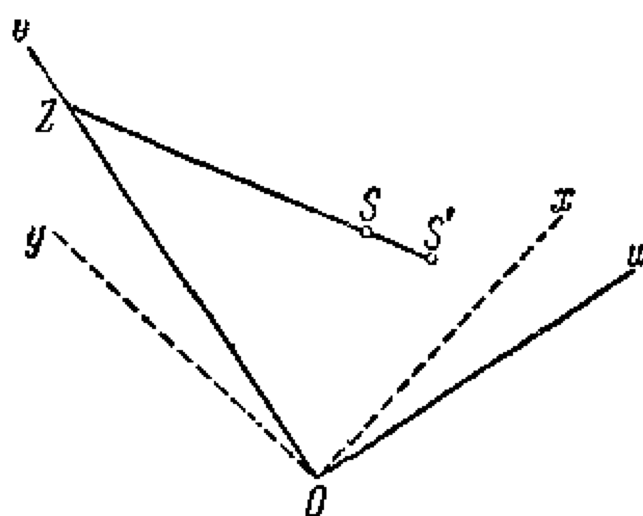


圖 40.

Z 點的坐標爲零及 $OZ=V$。大氣射折使恆星移向天頂。因此在照片上，S'，S，Z 在同一直線上，並且 S 在 S' 和 Z 的中間，角 SCS' 爲大氣折射，可令它等於 $k\tan\zeta$（參看§54末），其中 ζ 爲 S 的天頂距，k 爲與 ζ，壓力 p 和溫度 t 有關的係數；顯然 $\zeta=SCZ$，故

$$SCS'=k\tan SCZ\text{。}$$

設在天球中心 C 點作一空間坐標系：兩條軸與 u，v 平行，第三條軸向 CO 的方向。直線 CS 對於這些坐標軸的方向餘弦記爲 α，β，γ，而直線 CZ 的記爲 α'，β'，γ'。

那麽按解析幾何的定則，方向餘弦 α，β，γ 應與 u，v，1 成正比，而 α'，β'，γ' 與 0，V，1 成正比；因此

$$\alpha=\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+1}};\quad \beta=\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+1}};\quad \gamma=\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+1}};$$

$$\alpha'=0;\quad \beta'=\frac{V}{\sqrt{V^2+1}};\quad \gamma'=\frac{1}{\sqrt{V^2+1}}\text{。}$$

根據解析幾何的定則

$$\cos ZCS=\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=\frac{vV+1}{\sqrt{u^2+v^2+1}\sqrt{1+V^2}}\text{。}$$

由此算出 $\sin ZCS=\sqrt{1-\cos^2 ZCS}$ 經過不很複雜的代數運算後得

$$\sin ZCS=\frac{\sqrt{u^2(1+V^2)+(v-V)^2}}{\sqrt{u^2+v^2+1}\sqrt{1+V^2}}\text{。}$$

所以
$$\tan ZCS=\frac{\sqrt{u^2(1+V^2)+(v-V)^2}}{1+vV}=\frac{D}{1+vV},$$

若爲書寫簡便起見把分子記爲 D。

把這個公式應用到方向 CS'，因 S' 的坐標爲 u'，v'，得：

$$\tan ZCS'=\frac{\sqrt{u'^2(1+V^2)+(v'-V)^2}}{1+v'V}\text{。}$$

現在回到圖 40 上，不難由相似三角形推出下列關係：

$$\frac{u'-u}{S'S}=\frac{u}{SZ};\qquad \frac{v-v'}{SS'}=\frac{V-v}{SZ},$$

記比值 $\frac{SS'}{ZS}$ 爲 t，由是得：

$$\frac{u'-u}{u}=t=\frac{v-v'}{V-v};$$

又：
$$u'=u(1+t);\quad v'=v-t(V-v),$$
$$v'-V=(1+t)(v-V)\text{。}$$

把 u', v' 的式子代入 $\tan ZCS'$ 的式子中得：

$$\tan ZCS' = \frac{(1+t)D}{1+vV(1+t)-V^2 t}。$$

然後，有了 $\tan ZCS$ 和 $\tan ZCS'$，計算 ZCS' 和 ZCS 的差的正切，即 $\tan SCS'$，根據已知的公式

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \tan b}。$$

經過簡單的可是相當長的代數變換後得：

$$\tan SCS' = \frac{D[(1+t)(1+vV)-(1+vV(1+t)-V^2 t)]}{(1+vV)[1+vV(1+t)-tV^2]+(1+t)D^2} = \frac{tD}{1+u^2+v^2+t(u^2+v^2-vV)}。$$

但角 SCS' 爲恆星 S 的大氣折射；所以 $SCS' = k\tan SCZ$，其中 k 爲係數，隨着 SCZ 的變化而略爲變化，即對每個恆星有不同的值。對於一般照相時所得的值，即不超過 $80°$，SCS' 不超過 $6'$，故可令 $\tan SCS'$ 等於 SCS'，誤差不超過 $0''.001$（參看 §6, 2）。因此 $\tan SCS' = k\tan SCZ$，或

$$\frac{tD}{1+u^2+v^2+t(u^2+v^2-vV)} = k\frac{D}{1+vV}。$$

由此　$$t = \frac{k(1+u^2+v^2)}{1+vV-k(u^2+v^2-vV)} = \frac{k(1+u^2+v^2)}{1+vV}\left[1-\frac{k(u^2+v^2-vV)}{1+vV}\right]^{-1}。$$

但不難看出，括弧中的值與 1 的差最大時近似地等於 kvV，因 $k\approx 0.0003$，而 v 假定等於 $\frac{5°}{57°.3}$，而 V 在 $\zeta=82°$ 時等於 7（即 $\tan 82°$），故 $kvV = \frac{3\times5\times7}{57.3\times10^4} \approx \frac{2}{10^4}$；此值與 1 的比如此之小，以至於可以略去，我們就充分準確地得到

$$t = \frac{k(1+u^2+v^2)}{1+vV}。$$

因此；根據上面的等式

$$u'-u = ut = \frac{k(1+u^2+v^2)}{1+vV}u;$$

$$v'-v = t(v-V) = \frac{k(1+u^2+v^2)}{1+vV}(v-V)。$$

現在展開 $(1+vV)^{-1}$ 爲級數，而只取 u, v 的第一及第二次項，得

$$\left.\begin{aligned} u'-u &= ku-kuvV, \\ v'-v &= -kV+kv(1+V^2)-k(u^2+2v^2+v^2V^2)V。\end{aligned}\right\} \quad (70)$$

這些是大氣折射對 u 與 v 的總影響的式子，而不是大氣折射較差；k 對於每一個恆星有不同的值，雖然若 u, v 不超過 $5°$ 時這些 k 值間彼此相差很小。爲要得到恆星 S 對於坐標原點的大氣折射較差，設 k 在整個照片上有同樣的值。則對於坐標原點有：

$$u_0'-u_0=0;\quad v_0'-v_0=-kV,$$

由 $(u'-u)$ 和 $(v'-v)$ 中減去這些值即得恆星 S 對於坐標原點的大氣折射較差如下式（u, v 爲測出的坐標，u', v' 爲改正後的坐標）：

$$u'-u = ku-kuvV;\quad v'-v = +kv(1+V^2)-k(u^2+2v^2+v^2V^2)V。$$

但與 u, v 的一次冪成正比的量在處理照片時與其他類似的量一起考慮了，爲要計算第二次冪的大氣折射較差只剩下這些項：

$$(u'-u)_2=-k\,uv\,V;\quad (v'-v)_2=-k[u^2+2v^2+v^2V^2]V。$$

然而在測量照片時，不用 u, v 坐標系，而用另外一個坐標系：其中 $+y$ 軸的方向爲由 O 沿 O 點的赤經圈的投影向北天極，卽按赤緯增加的方向，而 $+x$ 軸沿 y 軸的垂線向赤經增加的方向(參看圖 40)。計算二次折射所必須的兩個量 $(x'-x)$ 及 $(y'-y)$ 是由 $(u'-u)$ 及 $(v'-v)$ 用簡單的轉換而得到的。$+v$ 和 $+y$ 間的交角爲星位角 q，記 $u'-u$ 爲 Δu；$v'-v$ 爲 Δv；$x'-x$ 爲 Δx；$y'-y$ 爲 Δy，就有

$$\left.\begin{aligned}&u=x\cos q-y\sin q; && v=x\sin q+y\cos q;\\ &\Delta u=\Delta x\cos q-\Delta y\sin q; && \Delta v=\Delta x\sin q+\Delta y\cos q;\\ &\Delta x=\Delta u\cos q+\Delta v\sin q; && \Delta y=\Delta v\cos q-\Delta u\sin q。\end{aligned}\right\}\tag{71}$$

所以，用 $\tan\zeta_0$ 代替 V，其中 ζ_0 爲 O 點的受大氣折射影響的視天頂距，則得：

$$\frac{-\Delta v}{k\tan\zeta_0}=(x\cos q-y\sin q)(x\sin q+y\cos q)\cos q+$$
$$+[(x\cos q-y\sin q)^2+(2+\tan^2\zeta_0)(x\sin q+y\cos q)^2]\sin q,$$
$$\frac{-\Delta y}{k\tan\zeta_0}=[(x\cos q-y\sin q)^2+(2+\tan^2\zeta_0)(x\sin q+y\cos q)^2]\cos q-$$
$$-(x\cos q-y\sin q)(x\sin q+y\cos q)\sin q。$$

展開括弧，合併同類項後得 (x', y' 爲眞位置，x, y 爲視位置)：

$$\left.\begin{aligned}x'-x=\Delta x=&-k\tan\zeta_0\,[x^2(2+\tan^2\zeta_0\sin^2 q)\sin q+\\&+xy(1+2\tan^2\zeta_0\sin^2 q)\cos q+y^2(1+\tan^2\zeta_0\cos^2 q)\sin q],\\ y'-y=\Delta y=&-k\tan\zeta_0[y^2(2+\tan^2\zeta_0\cos^2 q)\cos q+\\&+xy(1+2\tan^2\zeta_0\cos^2 q)\sin q+x^2(1+\tan^2\zeta_0\sin^2 q)\cos q]。\end{aligned}\right\}\tag{72}$$

爲了去掉大氣折射第二項的影響，必須在照片上測得的 x, y 值加上 Δx, Δy 的値；在這些公式中，x, y 用弧度表示，Δx, Δy 的單位則與 k 相同，卽(參看 §54 末)或爲弧度，若 k 近似地取爲 0.00029；或爲角度秒，若 k 近似地取爲 $60''$，或爲毫米，若以 $\frac{60''}{m}$ 代替 k，其中 m 爲照片上每毫米長的角度秒數。

還需要研究，在整個照片上取 k 爲同一値，這可以容許到甚麼程度，卽若把恆星 S 的大氣折射 $k\tan\zeta$ 取爲 $k_0\tan\zeta$ (k_0 爲照片中心 O 點的大氣折射係數)，則誤差爲何。最簡單的研究方法是計算對於不同的 ζ_0 以及和 ζ_0 相近的 ζ 的大氣折射 (根據普耳科夫表的平均值)。下表包含了需要的數字。在表中給出差 $k\tan\zeta-k_0\tan\zeta$ 的角度秒數，其中 k_0 爲對於 ζ_0 等於 45°，60°，75° 的值。若把這些差畫在圖上，以差爲 x，以 ζ 爲 y，則得一與直線相差不多的曲線；與直線的偏差界限載於表中。這些差的直線變化在處理天體照相和其他的改正一起考慮。故偏差卽代表其餘的誤差。

ζ	差	ζ	差	ζ	差	曲線	對直線的偏差
40°	+0″.017	55°	+0″.089	65°	+0″.409	由 40° 到 50°	到 ±0″.004
41	15	56	76	66	365		
42	12	57	63	67	305		
43	9	58	44	68	229	由 55° 到 65°	到 ±0″.035
44 +	4	59 +	24	69 +	127		
45	0	60	0	70	000	由 $57\frac{1}{2}^\circ$ 到 $62\frac{1}{2}^\circ$	到 ±0″.009
46 −	6	61 −	31	71 −	164		
47	11	62	69	72	376		
48	18	63	114	73	645	由 65° 到 75°	到 ±0″.27
49	24	64	165	74	998		
50 −	32	65 −	226	75 −	1 .471	由 $67\frac{1^\circ}{2}$ 到 $72\frac{1^\circ}{2}$	到 ±0″ 05

當我們由被大氣折射改變了的恆星位置 S 過去到眞位置 S' 時，公式(70)準確地表示恆星在照片上的位移。公式(72)也準確地表示對 x 和 y 而言的二次改正量。但在我們的推理中，中心恆星 $S_0(\alpha, \delta)$ 自照片中心 O 移開，它的坐標就已經不等於 S_0 的坐標，恆星 S_0' 與中心 O 相距 $k \tan \zeta$。在實用上，最好使它位於光學中心 O。爲此必須轉動照片，對恆星的坐標還得加上二次項：

$$dx = k \tan \zeta_0 \sin q \cdot x^2 + k \tan \zeta_0 \cos q \cdot xy,$$

$$dy = k \tan \zeta_0 \sin q \cdot xy + k \tan \zeta_0 \cos q \cdot y^2 。$$

把這些改正量加到(72)中，並令

$$\tan \zeta_0 \sin q = X, \quad \tan \zeta_0 \cos q = Y,$$

便得到實際應用的最後公式：

$$\left.\begin{aligned} x' - x &= -kX[(1+X^2)x^2 + 2XYxy + (1+Y^2)y^2], \\ y' - y &= -kY[(1+X^2)x^2 + 2XYxy + (1+Y^2)y^2], \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

其中 x, y 爲在照片上測量出的坐標，x', y' 爲改正後的坐標。

第八章　視差

§61. 基本概念；名詞　同時由不同的兩點 B, B' 來看同一目標 C，一般說來是沿不同的方向 BC 和 $B'C$、除非 B, B', C 在同一直線上，且 B, B' 在 C 的同一邊，這種現象就稱爲視差或視差位移(就一般意義來講)。因此，由於視差，我們在地面上不同的點看天體的方向就與在地心看同一天體的方向不同；由於視差，在地上不同的地方所看到的流星的方向就不同；由於視差，在地上的觀測者所看到的行星運動就與在太陽上的觀測者所看到的不同。因此同時在地上不同兩地來量某天體在天球上的位置就得不重合的兩點。它們之間的弧長就作爲視差位移的大小。它們的坐標，例如地平緯度，赤經，赤緯等的差別就稱爲此天體的地平緯度，赤經，赤緯等的視差。

若把同樣的討論應用於在地面上一點對某天體所觀測到的坐標(所謂地面坐標)和在地心所觀測到的坐標(地心坐標)間的差別，則所得的視差稱爲周日視差；它隨地球自轉而變化。

由地心看到的天體方向和在地面上(地面採用球面或橢球面)那些恰好看見此天體在地平上的地方所看到的天體方向間的差，稱爲狹義的視差，或者，此視差是由天體中心到地心的方向和沿地面切線方向間的交角(假定沒有大氣折射)；這種視差，稱爲周日地平視差。若把地球當做旋轉橢圓體，且觀測地或切線與地面的接觸點在赤道上，則此視差稱爲赤道地平視差。因此赤道地平視差爲直角三角形中的小角，此三角形的斜邊爲地心到天體中心的距離，小垂邊爲地球赤道半徑；因此，若 R 表示地球赤道半徑，$\varDelta$ 表示地心到天體中心的距離，p 表示赤道地平視差，則 $R=\varDelta\sin p$。

相似地，應用於恆星或星雲的周年視差，就是三角形的小角，其斜邊爲太陽到恆星的距離，小垂邊爲地球軌道半長徑。若地球軌道取爲

圓形，則可以說，周年視差是由恆星來看地球軌道半徑所張的角，此半徑垂直於地球到恆星的方向；因此，若 π 表示周年視差，Δ 表示太陽到恆星的距離，a 爲地球軌道半徑，則 $a=\Delta\sin\pi$。

赤道地平視差和周年視差用於測定由地心及由太陽到天體的距離。這些視差本身的測定是基於觀測天體在天球上的視差位移，對於周日視差在地上不同的點進行觀測，對於周年視差在地球軌道上不同的點進行觀測。

從另一方面，在理論及實用天文學中，要由在地面上所觀測到的天體球面坐標算出天體的地心球面坐標，必須計算視差位移。

我們需要推出計算各種坐標的視差的公式，它們與這些坐標的值和地平視差和周年視差的值有關。可用兩個方法推出：一個是用於視差數值不大的情形，如行星，太陽和恆星，以應用視差位移的一般定律作根據，另外一個是視差值大時所必須用的，實際上只應用於月球（參看 §67），它根據直線坐標轉換的理論。

§62. 視差位移的一般定律 令（圖 41，a）B，B' 爲兩個觀測者的位置，或者是同一個觀測者的兩個位置，他或由 B 移到 B'，即向 A' 點（在 BB' 的延長線上）的方向，或由 B' 移到 B，即向 A 點的方向。由 B 點，看目標 C 是沿 BC 方向，由 B' 點是沿 $B'C$ 方向。方向間的差爲 BCB' 角；這就是 C 點的視差位移，更簡單地說，就是 C 點的視差。

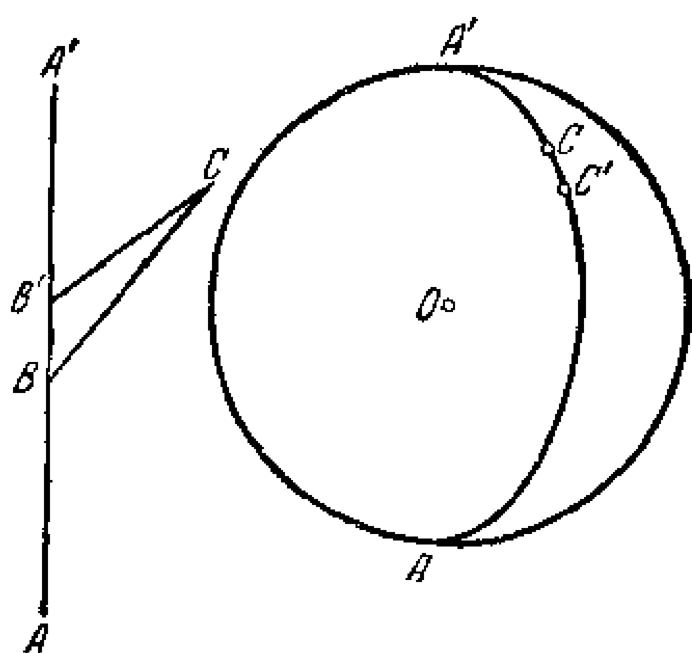


圖 41.

圖 41，b 表示由外面所看到的天球，中心爲 O。因按普通規則，OC 平行於 BC，OC' 平行於 $B'C$，$A'OA$，平行於 $A'B'BA$，則在天球上 A'，C，C'，A 在同

一大圓上，因爲 A', B', B, A, C 在同一平面上，COC' 角或 $\widehat{CC'}$ 就等於視差位移 $B'CB$。球上的 A' 和 A 點稱爲觀測者移動的奔赴點：A' 點爲由 B 向 B'；A 點爲由 B' 向 B 的奔赴點。

若線段 BB' 用字母 b 來表示，距離 BC 和 $B'C$ 用 Δ, Δ' 來表示；視差位移的角用 p 來表示，則由三角形 BCB' 有：

$$\sin p=\frac{b}{\Delta}\sin A'B'C=\frac{b}{\Delta'}\sin A'BC,$$

或在球面上

$$\sin CC'=\frac{b}{\Delta}\sin A'C'=\frac{b}{\Delta'}\sin A'C \tag{74}$$

或 $$\sin p=\sin CC'=\frac{b}{\Delta}\sin(A'C+p)=\frac{b}{\Delta'}\sin(A'C'-p)。$$

由此得出視差位移的一般定律：由於視差，天體在天球上的位置 C 沿着大圓離開奔赴點 A' 移動了一個角度 p，它的正弦等於比值 $\frac{b}{\Delta}$ 和 $(A'C+p)$ 弧的正弦的乘積，或比值 $\frac{b}{\Delta'}$ 和 $(A'C'-p)$ 弧的正弦的乘積。

限制於 $\frac{b}{\Delta}$, $\frac{b}{\Delta'}$ 值的一次冪，我們得到第一次近似公式：

$$\sin p_1=\frac{b}{\Delta'}\sin A'C'=\frac{b}{\Delta}\sin A'C。$$

若把 $\frac{b}{\Delta}$, $\frac{b}{\Delta'}$ 的二次冪計算在內，則得：

$$\begin{aligned}\sin p_2&=\frac{b}{\Delta}(\sin A'C+p\cos A'C)=\frac{b}{\Delta}\sin A'C(1+p\cot A'C)=\\&=\frac{b}{\Delta}\sin A'C\left(1+\frac{b}{\Delta}\cos A'C\right)=\\&=\frac{b}{\Delta}\sin A'C+\left(\frac{b}{\Delta}\right)^2\sin A'C\cos A'C,\end{aligned} \tag{75}$$

又 $$\begin{aligned}\sin p_2&=\frac{b}{\Delta'}(\sin A'C'-p\cos A'C')=\frac{b}{\Delta'}\sin A'C'\left(1-\frac{b}{\Delta'}\cos A'C'\right)=\\&=\frac{b}{\Delta'}\sin A'C'-\left(\frac{b}{\Delta'}\right)^2\sin A'C'\cos A'C'。\end{aligned}$$

對所有的天體，除月球外，周日視差都不超過 $60''$（小行星愛神星在離地球最近時才達 $60''$）；因此式中第二項等於

$$\frac{1}{2}(60''/206265'')^2\,206265\sin 2A'C=0''.009\sin 2A'C\text{。}$$

若這樣的誤差可容許，則用第一次近似公式就夠了；它將在下段被推出。

在周年視差的情形中，π 不超過 $1''$，故用第一次近似公式總是夠了。

§63. 地球爲球形時的周日視差 若不要求準確到 $0''.01$，可以取地球爲半徑等於 R 的圓球，地上任何地點的鉛垂線都經過地心。令 Z 爲觀測地點 M 的天頂；ZMS 爲天體 S 的視天頂距，等於 z'；在地心時，地心天頂距爲 ZOS，等於 z。差 $z'-z$ 的第一次近似値等於 $\frac{R}{\Delta}\sin z'$，故 $z=z'-\frac{R}{\Delta}\sin z'$。

當 $\sin z'=1$ 時，卽當天體在觀測者的地平上時，對於已知的 Δ，$z-z'$ 達到最大値。$\frac{R}{\Delta}$ 的値爲天體的地平視差；若用 p'' 表示，以弧秒爲單位，則

$$z=z'-p''\sin z'\text{。}$$

因爲天頂，天體的地面位置 S' 和地心位置 S 在天球的同一大圓上，所以天體的地平經度的視差爲零。由於所作的假定，這些結論錯誤到怎麼樣程度，我們將在下節中看出。

§64. 地球爲橢圓體時的天頂距和地平經度的視差 取地球爲扁的橢圓體。令圖 42 中爲 M 點的子午截面；C 爲地球中心；P 爲地球北極；A 爲赤道上的點；MZ 爲鉛垂線向天頂 Z 的方向；CM 爲 M 點的向徑 ρ；CM 的延長線向所謂的地心天頂 Z'；S 爲子午線外的天體；SMZ 爲地面天頂距 z'；若通過中心 C 作直線 CD 平行於 MZ，則 DCS 角爲天體的地心天頂距 z。天體的地面地平經度 A' 爲 $PMCA$ 平面和

ZMS 平面間的交角，兩平面相交於鉛垂線 MZ。地心地平經度 A 爲同一子午面 $PMCA$ 與 DCS 平面間的交角，此兩平面交於直線 CD。

圖 42.

圖 43.

若按一般規則，通過天球中心 O 作平行於圖 42 的直線，則得到圖 43：P 爲天極，Z 爲天頂，Z' 爲地心天頂，S 爲由地心看到的天體，$ZS=z$，$Z'ZS=A$；S' 爲由 M 點看到的天體。卽 $ZS'=z'$，$Z'ZS'=A'$。

根據視差位移的一般定律，Z' 爲觀測者由地心移向 M 點的奔赴點，移動了向徑 ρ；因此 Z'，S，S' 位於同一大圓上，且 S' 離 Z' 要比 S 遠些；視差位移 SS' 的正弦等於 $\frac{\rho}{\Delta}\sin Z'S'$，其中 Δ 表示由地心到天體的距離。

在窄球面三角形 ZSS' 中，SZS' 角爲地平經度視差：$A'-A$；邊的差 $ZS'-ZS$ 爲天頂距視差：$z'-z$。爲了求出這些視差，必須根據 §13 的定則解此三角形。若地平視差小於 $60''$，則限制於第一次近似。則有：

$$z'-z=SS'\cos ZS'Z';\quad (A'-A)\sin z'=SS'\sin ZS'Z'.$$

以 $\frac{\rho}{\Delta}\sin Z'S'$ 代替 SS'，得：

$$\left.\begin{aligned} z'-z&=\frac{\rho}{\Delta}\sin Z'S'\cos ZS'Z';\\ (A'-A)\sin z'&=\frac{\rho}{\Delta}\sin Z'S'\sin ZS'Z'. \end{aligned}\right\}\tag{76}$$

但由三角形 $ZS'Z'$ 根據球面三角基本公式得：

$$\left.\begin{aligned} \sin Z'S'\sin ZS'Z' &= \sin ZZ'\sin A', \\ \sin Z'S'\cos ZS'Z' &= \cos ZZ'\sin ZS' - \sin ZZ'\cos ZS'\cos A'。\end{aligned}\right\} \quad (77)$$

ZZ' 弧爲天頂和地心天頂間的距離，或爲向徑與橢圓體法線間的交角，或爲測地緯度和地心緯度的差：$\varphi-\varphi'$；我們已在 §20 得到此差的式子(公式 36)$\varphi-\varphi'=692''.6\sin 2\varphi$。以(77)式代入(76)式，得：

$$z'-z=\frac{\rho}{\Delta}[\cos(\varphi-\varphi')\sin z'-\sin(\varphi-\varphi')\cos z'\cos A'],$$

$$(A'-A)\sin z'=\frac{\rho}{\Delta}\sin(\varphi-\varphi')\sin A'。$$

但 $\frac{\rho}{\Delta}=\frac{\rho}{a}\cdot\frac{a}{\Delta}$，其中 a 表示地球扁球體的半長徑。在 §20 中，我們已求出 $\frac{\rho}{a}$ 的式子(公式 37)：$\frac{\rho}{a}=1-0.003324\sin^2\varphi$；$\frac{a}{\Delta}$ 爲天體的赤道地平視差 p_0 的正弦。因此

$$z'-z=\frac{\rho}{a}\sin p_0[\cos(\varphi-\varphi')\sin z'-\sin(\varphi-\varphi')\cos z'\cos A'],$$

$$(A'-A)\sin z'=\frac{\rho}{a}\sin p_0\sin(\varphi-\varphi')\sin A'。$$

這裏 $z'-z$ 和 $A'-A$ 用弧度表示：爲要表爲角度秒，必需乘上 $206265''$；令$(z'-z)''$，$(A'-A)''$ 和 p_0'' 表示對應於各弧的角度秒數，則

$$(z'-z)''=p_0''\frac{\rho}{a}[\cos(\varphi-\varphi')\sin z'-\sin(\varphi-\varphi')\cos z'\cos A'],$$

或在同樣的準確度下

$$\left.\begin{aligned} (z'-z)'' &= p_0''\frac{\rho}{a}\sin[z'-(\varphi-\varphi')\cos A'], \\ (A'-A)'' &= p_0''\frac{\rho}{a}\sin(\varphi-\varphi')\sin A'/\sin z'。\end{aligned}\right\} \quad (78)$$

注意 $\varphi-\varphi'$ 不超過 $11'.6$；因此 $\sin(\varphi-\varphi')<\frac{1}{300}$，若 $p_0''<60''$，則 $(A'-A)''\sin z<0''.2$，故若 z 不很小時，$(A'-A)''$ 不大；靠近天頂時，根

據其他原因，例如儀器，不便於觀測。另外，p_0 小時，求出的式子右端可以在同一準確度下，換 z' 和 A' 爲 z 和 A。同樣，p_0 小時，窄三角形的解可限制於第一次近似，而略去 §13 中所指出的第二次近似。

第一次近似的誤差已在 §13 末尾指出；由那裏所說的得知，在 $p_0 = 60''$ 時，$(z'-z)_1$ 和 $(A'-A)\sin z$ 的最大誤差等於 $\frac{1}{2} \times \frac{60^2}{206265} \cot z = 0''.0087 \cot z$，因此，在 $z<42°$ 時，它小於 $0''.01$，在 $z<10°$ 時，小於 $0''.05$。

§65. 時角、赤經和赤緯的周日視差 這些視差還是用求出 z 和 A 的視差的方法得出，僅所用的窄球面三角形不同，這裏用的是三角形 SPS'（圖 43）。我們有 $PS=90°-\delta$；$PS'=90°-\delta'$；ZPS' 爲時角 t'；ZPS 爲時角 t；因此 $SPS'=t'-t$，角 SPS' 就是 $\alpha-\alpha'$。α', δ', t' 爲地面坐標，α, δ, t 爲地心坐標。

限制於第一次近似，根據 §13 的公式，由三角形 SPS' 得

$$PS-PS'=SS'\cos PSS';\quad SPS'\sin PS=SS'\sin PSS'。$$

但 $SS'=\frac{\rho}{\Delta}\sin Z'S'$ 或在 $p<60''$ 時，$SS'=\frac{\rho}{\Delta}\sin Z'S$。

因此

$$\delta'-\delta=\frac{\rho}{\Delta}\sin Z'S\cos PSS';\quad (t'-t)\cos\delta=\frac{\rho}{\Delta}\sin Z'S\sin PSS'。$$

但角 $PSS'=180°-$ 角 PSZ'；因此

$$\left.\begin{aligned}\delta'-\delta&=-\frac{\rho}{\Delta}\sin Z'S\cos PSZ';\\(t'-t)\cos\delta&=\frac{\rho}{\Delta}\sin Z'S\sin PSZ'。\end{aligned}\right\}\tag{79}$$

由球面三角形 PSZ' 有：

$$\sin Z'S\cos PSZ'=\cos PZ'\sin PS'-\sin PZ\cos PS\cos Z'PS,$$

$$\sin Z'S\sin PSZ'=\sin PZ'\sin Z'PS$$

或 $$\sin Z'S\cos PSZ'=\sin\varphi'\cos\delta-\cos\varphi'\sin\delta\cos t,$$

$$\sin Z'S \sin PSZ' = \cos\varphi' \sin t。$$

因此公式(79)變爲

$$\delta' - \delta = -\frac{\rho}{\Delta}(\sin\varphi' \cos\delta - \cos\varphi' \sin\delta \cos t);$$

$$(t'-t)\cos\delta = \frac{\rho}{\Delta}\cos\varphi' \sin t。$$

變 $\frac{\rho}{\Delta}$ 爲 $\frac{\rho}{a}\cdot\frac{a}{\Delta}=\frac{\rho}{a}\cdot p_0$，其中 p_0 爲天體的赤道地平視差，得：

$$\left.\begin{aligned} t-t' = \alpha'-\alpha &= -p_0\frac{\rho}{a}\cos\varphi' \sin t \sec\delta, \\ \delta'-\delta &= -p_0\frac{\rho}{a}(\sin\varphi' \cos\delta - \cos\varphi' \sin\delta \cos t)。\end{aligned}\right\} \quad (80)$$

永遠有 $t+\alpha=t'+\alpha'=s$，這裏 s 爲地方恆星時。

可換 p_0 爲 $\frac{p_\odot}{\Delta}$，其中 $p_\odot$ 爲太陽的視差，而 Δ 爲天體到地球中心的距離，以天文單位爲單位。則公式成爲：

$$(\alpha'-\alpha)^s = -\frac{p_\odot}{15}\frac{\rho}{a}\cos\varphi' \frac{\sin t \sec\delta}{\Delta},$$

$$(\delta'-\delta)'' = p_\odot\frac{\rho}{a}\cos\varphi' \frac{\cos t \sin\delta}{\Delta} - p_\odot\frac{\rho}{a}\sin\varphi' \frac{\cos\delta}{\Delta}。$$

令 $p_\odot=8''.80$，對於每個緯度 φ'，$\frac{p_\odot}{15}\frac{\rho}{a}\cos\varphi'$，$p_\odot\frac{\rho}{a}\sin\varphi'$，$p_\odot\frac{\rho}{a}\cos\varphi'$ 爲常數，一次算出就不必再算了。

上面的公式是由視差三角形 $SS'P$ 取第一次近似(參看§13)得出，但根據和§64 末了同樣的考慮，最大誤差在 $\delta>48°$ 時超過 $0''.01$，而應用此公式的行星離天赤道那樣遠是很少的。

彗星的坐標的測定不會準確到使得計算它的視差需要比公式(80)算出的更準確。

公式(80)給出了 α，δ 的視差爲 α，δ，t 的函數，但若 p_0 小時(在行星的情形中小於 $60''$)，若 δ 不近於 $90°$，可換公式右端的 α，δ，t 爲 α'，

δ', t', 所引起的誤差小於 $0''.01$。

然而若需要更準確地計算視差的影響，到第二次近似，則第一，所用的天頂距的視差公式 $SS'=p_0\frac{\rho}{a}\sin Z'S$ 需要換爲更準確的 $p_0\frac{\rho}{a}\times\sin Z'S'$，卽(參看公式75)用$\left(1+p_0\frac{\rho}{a}\cos Z'S\right)$乘上它，或同樣準確地，乘上$\left(1+p_0\frac{\rho}{a}\cos Z'S'\right)$甚至乘上$(1+p_0\cos Z'S')$，因$\frac{\rho}{a}$與 1 的差別小於 0.003。

第二，在解窄三角形 PSS' 時，需要引入第二次近似。若第一次近似式用符號 $\Delta\alpha_1$, $\Delta\delta_1$ 表示

$$\Delta\alpha_1=-p_0\frac{\rho}{a}\cos\varphi'\sin t\sec\delta,$$

$$\Delta\delta_1=-p_0\frac{\rho}{a}(\sin\varphi'\cos\delta-\cos\varphi'\sin\delta\cos t),$$

則在第二次近似中我們有(參看§13)：

$$\Delta\alpha_2=\Delta\alpha_1+\Delta\alpha_1\Delta\delta_1\tan\delta;\ \Delta\delta_2=\Delta\delta_1-\frac{1}{4}\Delta\alpha_1^2\sin 2\delta。$$

考慮到兩種改正，就得到以角秒和時秒爲單位的第二次近似式

$$\Delta\alpha_2''=15\Delta\alpha_2^s=\Delta\alpha_1''+\frac{\Delta\alpha_1''\times\Delta\delta_1''}{206265}\tan\delta+\frac{\Delta\alpha_1''\times p_0''}{206265}\cos z,$$

$$\Delta\delta_2''=\Delta\delta_1''-\frac{1}{4}\times\frac{(\Delta\alpha_1'')^2}{206265}\times\sin 2\delta+\frac{\Delta\delta_1''\times p_0''}{206265}\cos z。$$

§66. 視差對天體到觀測者的距離和天體角半徑的影響 由於視差，天體到觀測者 M 的距離，卽 Δ'，和天體到地心的距離，卽 Δ，不相同。由平面三角形(圖 42)有：

$$\frac{SM}{SC}=\frac{\Delta'}{\Delta}=\frac{\sin SCM}{\sin SMC}=\frac{\sin SCM}{\sin SMZ'};$$

但 $SCM=SMZ'-MSC$，而角 MSC 爲視差位移角 p；因此

$$\frac{\Delta'}{\Delta}=\frac{\sin(SMZ'-p)}{\sin SMZ'}=\frac{\sin SMZ'\cos p-\cos SMZ'\sin p}{\sin SMZ'}。$$

p 小時，可以取 $\cos p=1$，則

$$\frac{\Delta'}{\Delta}=1-\sin p\cot SMZ'。$$

但 $$\sin p=\frac{\rho}{a}\sin p_0\sin SMZ',$$

因此 $$\frac{\Delta'}{\Delta}=1-\frac{\rho}{a}\sin p_0\cos SMZ'。$$

又 SMZ' 與 SMZ 的差不大於弧 ZZ'，卽小於 $11'$，因此 $\cos SMZ'$ 和 $\cos SMZ$ 或 $\cos z'$ 的差小於 $\cos z'$ 的 $\frac{1}{300}$；因此

$$\frac{\Delta'}{\Delta}=1-\frac{\rho}{a}\sin p_0\cos z'。$$

若 p_0 小，p_0'' 表示 p_0 的角秒數，則

$$\frac{\Delta'}{\Delta}=1-\frac{\rho}{a}\times\frac{p_0''}{206265''}\cos z'。$$

若 R, R' 爲由 C 和 M 所看到的天體角半徑，則 $\frac{\sin R}{\sin R'}=\frac{\Delta'}{\Delta}$，或簡單地 $\frac{R}{R'}=\frac{\Delta'}{\Delta}$，甚至對於月球此式亦適用，月球的 R 等於 $15'—16'$.

§67. 月球的周日視差的準確公式 月球比其他天體更近地球；它的赤道地平視差與它和地球的距離有關，變化於 $54'$ 與 $60'$ 之間。因此前面所推出的對於其他天體夠準確的公式，對於月球就不夠準確了。在本節中，我們將推出更準確的公式。這些公式對於視差小的情形，也可以用，如果要求的準確度達到 $0''.001$。

令 α, δ, Δ 爲月球的地心赤經，赤緯和月心到地心的距離，α', δ', Δ' 爲月球的地面赤經，赤緯和月心到地面的距離；φ', ρ 爲觀測地點的地心緯度和向徑；s 爲地方恆星時；因此，φ' 和 s 爲地心天頂的赤緯和赤經。以地心爲原點作直角坐標系；x 軸向着春分點，y 軸向着天赤道上赤經爲 $90°$ 的點，z 軸向着北天極。向量 Δ（由地心到天體中心的距離）在這些軸上的投影爲 $\Delta\cos\delta\cos\alpha$, $\Delta\cos\delta\sin\alpha$, $\Delta\sin\delta$；同樣地寫出

向量 Δ' 和 ρ 的投影。但向量 Δ 在某軸上的投影等於向量 Δ' 與 ρ 在同一軸上的投影的和，或向量 Δ' 的投影等於向量 Δ 與 ρ 的投影的差。因此有三個關係：

$$\left.\begin{aligned}\Delta'\cos\delta'\cos\alpha' &= \Delta\cos\delta\cos\alpha-\rho\cos\varphi'\cos s,\\ \Delta'\cos\delta'\sin\alpha' &= \Delta\cos\delta\sin\alpha-\rho\cos\varphi'\sin s,\\ \Delta'\sin\delta' &= \Delta\sin\delta-\rho\sin\varphi'。\end{aligned}\right\}\tag{81}$$

我們必需推出 $(\alpha'-\alpha)$ 和 $(\delta'-\delta)$ 的式子。

以 $-\sin\alpha$ 乘第一式，以 $+\cos\alpha$ 乘第二式，相加；然後第一式乘 $\cos\alpha$，第二式乘 $\sin\alpha$，相加。則得：

$$\Delta'\cos\delta'\sin(\alpha'-\alpha)=-\rho\cos\varphi'\sin(s-\alpha)。$$

$$\Delta'\cos\delta'\cos(\alpha'-\alpha)=\Delta\cos\delta-\rho\cos\varphi'\cos(s-\alpha)。$$

由此

$$\tan(\alpha'-\alpha)=\frac{-\rho\cos\varphi'\sin(s-\alpha)}{\Delta\cos\delta-\rho\cos\varphi'\cos(s-\alpha)}=$$

$$=-\frac{\rho}{\Delta}\frac{\cos\varphi}{\cos\delta}\sin(s-\alpha)\left[1-\frac{\rho\cos\varphi'}{\Delta\cos\delta}\cos(s-\alpha)\right]^{-1}。\tag{82}$$

可展開方括弧中的式子爲級數；則得：

$$\begin{aligned}\tan(\alpha'-\alpha)=&-\frac{\rho\cos\varphi'}{\Delta\cos\delta}\sin(s-\alpha)-\\ &-\left(\frac{\rho\cos\varphi'}{\Delta\cos\delta}\right)^2\sin(s-\alpha)\cos(s-\alpha)-\\ &-\left(\frac{\rho\cos\varphi}{\Delta\cos\delta}\right)^3\sin(s-\alpha)\cos^2(s-\alpha)-\\ &-\left(\frac{\rho\cos\varphi'}{\Delta\cos\delta}\right)^4\sin(s-\alpha)\cos^3(s-\alpha)-\cdots\end{aligned}$$

但爲了得到月球視差的秒的小數，必需取級數的四項；因此，更有用的是根據公式(82)來計算，不展開爲級數。

爲了得到赤緯的視差，(81)的第一式乘上 $\cos\frac{1}{2}(\alpha'+\alpha)$，第二式乘

上 $\sin\frac{1}{2}(\alpha'+\alpha)$，相加；則得：

$$\Delta'\cos\delta'\cos\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha)=\Delta\cos\delta\cos\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha)-$$
$$-\rho\cos\varphi'\cos\left[s-\frac{1}{2}(\alpha'+\alpha)\right],$$

由此得：

$$\Delta'\cos\delta'=\Delta\cos\delta-\rho\cos\varphi'\frac{\cos\left[s-\frac{1}{2}(\alpha'+\alpha)\right]}{\cos\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha)},$$

而由(81)的第三式得

$$\Delta'\sin\delta'=\Delta\sin\delta-\rho\sin\varphi'。$$

現在引入輔助量 β 與 γ，$\beta>0$ 且

$$\left.\begin{aligned}&\beta\sin\gamma=\sin\varphi',\\&\beta\cos\gamma=\frac{\cos\varphi'\cos\left[s-\frac{1}{2}(\alpha'+\alpha)\right]}{\cos\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha)}。\end{aligned}\right\}\qquad(83)$$

則最後兩個方程式變成

$$\Delta'\cos\delta'=\Delta\cos\delta-\rho\beta\cos\gamma,$$
$$\Delta'\sin\delta'=\Delta\sin\delta-\rho\beta\sin\gamma。$$

用以前的方法，此二式一個乘上 $\sin\delta$，另一個乘上 $\cos\delta$，再相加或相減，得：

$$\Delta'\sin(\delta'-\delta)=-\rho\beta\sin(\gamma-\delta),$$
$$\Delta'\cos(\delta'-\delta)=\Delta-\rho\beta\cos(\gamma-\delta)$$

又 $$\tan(\delta'-\delta)=\frac{-\rho\beta\sin(\gamma-\delta)}{\Delta-\rho\beta\cos(\gamma-\delta)}=$$
$$=-\frac{\rho\beta}{\Delta}\sin(\gamma-\delta)\left[1-\frac{\rho\beta}{\Delta}\cos(\gamma-\delta)\right]^{-1}。$$

在 $\tan(\alpha'-\alpha)$ 和 $\tan(\delta'-\delta)$ 的式子中，把 $\frac{\rho}{\Delta}$ 換爲 $\frac{\rho}{a}\cdot\frac{a}{\Delta}=\frac{\rho}{a}\sin p_0$，其

中 p_0 爲天體的赤道地平視差，則

$$\left.\begin{aligned}\tan(\alpha'-\alpha)&=-\frac{\rho}{a}\sin p_0\frac{\cos\varphi'}{\cos\delta}\sin(s-\alpha)\times\\&\quad\times\left[1-\frac{\rho}{a}\sin p_0\frac{\cos\varphi'}{\cos\delta}\cos(s-\alpha)\right]^{-1},\\\tan(\delta'-\delta)&=-\frac{\rho}{a}\sin p_0\,\beta\sin(\gamma-\delta)\times\\&\quad\times\left[1-\frac{\rho}{a}\sin p_0\,\beta\cos(\gamma-\delta)\right]^{-1}。\end{aligned}\right\}\tag{84}$$

$\frac{\rho}{a}$ 和 φ' 是由已知的 φ 根據§20 的公式算出。至於距離 Δ 和 Δ'，則由 $\Delta'\cos\delta'$ 和 $\Delta'\sin\delta'$ 的式中消去 ρ，不難得出

$$\Delta'\sin(\delta'-\gamma)=\Delta\sin(\delta-\gamma)。$$

因天體的地面視角半徑 R' 和地心視角半徑 R 的正弦，反比於距離 Δ' 和 Δ，所以

$$\sin R\sin(\delta'-\gamma)=\sin R'\sin(\delta-\gamma)。$$

被我們所推出的公式給出了赤經和赤緯的視差 $(\alpha'-\alpha)$，$(\delta'-\delta)$ 的公式，這些視差是地心坐標 α 與 δ 的函數。爲要得出視差爲地面坐標 α' 與 δ' 的函數，可以重複前面的推導，只做一些明顯的改變，但更簡單的是注意到，若在方程式(81)中把 α,δ,Δ 換爲 α',δ',Δ'，把 α',δ'，Δ' 換爲 α,δ,Δ，換 ρ 爲 $-\rho$，則(81)式仍不改變。所以在我們的結果中也可以作這樣的代換，而得

$$\left.\begin{aligned}\tan(\alpha-\alpha')&=\frac{\rho}{a}\sin p_0\frac{\cos\varphi'}{\cos\delta'}\sin(s-\alpha')\times\\&\quad\times\left[1+\frac{\rho}{a}\sin p_0\frac{\cos\varphi'}{\cos\delta'}\cos(s-\alpha')\right]^{-1},\\\tan(\delta-\delta')&=\frac{\rho}{a}\sin p_0\,\beta\sin(\gamma-\delta')\times\\&\quad\times\left[1+\frac{\rho}{a}\sin p_0\,\beta\cos(\gamma-\delta')\right]^{-1}。\end{aligned}\right\}\tag{85}$$

β, γ 的值與前面相同,因換 α 爲 α', 換 δ 爲 δ' 時,它們不變。

§68. 天體周日視差的測定　周日視差的公式用於(1)測量天體的赤道地平視差,爲要由公式 $\Delta=\frac{a}{\sin p_0}$ 測定天體中心到地心的距離 Δ, 其中 a 爲地球赤道半徑;(2)計算行星及彗星的軌道,此時所求的是行星及彗星的地心坐標 α, δ, 由用儀器觀測到的行星或彗星的地面坐標 α' 及 δ' 推算出來。以後我們將看到,這兩個問題是互相連繫的。

測量天體視差的最簡單方法爲:在地上緯度相差很多的兩個地方(在彼此很近的兩條子午線上,其經度差 $\Delta\lambda$ 爲已知)測量天體在各地中天時的赤緯. 在東面那條子午線上觀測到的天體地心赤緯記爲 δ, 則在西面觀測到的就等於 $\delta+\Delta\lambda\frac{d\delta}{dt}$, 其中 $\frac{d\delta}{dt}$ 由天體運動的表可知, 也就是說, $\Delta\lambda\frac{d\delta}{dt}$ 可以算出。

若在 M_1, M_2 兩地測得天體中心的地面赤緯爲 δ_1, δ_2, 若 p_0 充分小時,例如 $<60''$, 則根據公式(80)得下列二方程式

$$\delta_1-\delta=-p_0\frac{\rho_1}{a}\sin(\varphi_1'-\delta_1),$$

$$\delta_2-\delta-\Delta\lambda\frac{d\delta}{dt}=-p_0\frac{\rho_2}{a}\sin(\varphi_2'-\delta_2),$$

或在視差很大的情形下,例如在月球的情形,根據(84),有 $s=\alpha'=\alpha$, $\beta=1$, $\gamma=\varphi'$:

$$\tan(\delta-\delta_1)=\frac{\rho_1}{a}\sin p_0\sin(\varphi_1'-\delta_1)-$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_1}{a}\sin p_0\right)^2\sin 2(\varphi_1'-\delta_1)+\cdots$$

$$\tan\left(\delta+\Delta\lambda\frac{d\delta}{dt}-\delta_2\right)=\frac{\rho_2}{a}\sin p_0\sin(\varphi_2'-\delta_2)-$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_2}{a}\sin p_0\right)^2\sin 2(\varphi_2'-\delta_2)+\cdots$$

在兩種情形中,我們都有在觀測時刻的包含兩個未知量 δ, p_0 的兩個方

程式。在第一種情形中，p_0 可以很簡單地得出；二式相減得：

$$\delta_2-\delta_1-\Delta\lambda\frac{d\delta}{dt}=p_0\left[\frac{\rho_1}{a}\sin(\varphi_1'-\delta_1)-\frac{\rho_2}{a}\sin(\varphi_2'-\delta_2)\right],$$

在此方程式中，除 p_0 外都是已知量。在第二種情形中，方程式用逐步近似法解出。

要使在差 $\delta_2-\delta_1$ 中的不可避免的測量誤差對測定 p_0 的影響較小，需要使 p_0 的係數儘可能大；但因 ρ_1 及 ρ_2 彼此相差很小，則需要使 φ_1' 和 φ_2' 彼此相差儘可能大，卽進行觀測的兩地彼此相離儘量遠；最好是一個在北半球：$\varphi_1'>0$，另一個在南半球：$\varphi_2'<0$。

曾經不只一次用此方法測量月球的視差。還有根據天體力學的定理由月球運動的理論來測定月球視差的方法，其準確度並不更小。

爲要測定太陽的視差，這樣的方法不能用，因爲太陽中心的赤緯不可能測到充分準確的程度(到 $0''.01$)。因此要用下面的迂迴的方法。令地球中心到太陽中心的距離爲 A，對應的赤道地平視差爲 p_0，則 $a=A\sin p_0$。設某行星在某時刻與地球的距離 Δ 和距離 A 的比率已知，卽已知 $\frac{\Delta}{A}$ 等於，比方說，k。那麼若測定此行星在當時的視差 p，則得：$a=\Delta\sin p$，由此 $\sin p_0=\frac{\Delta}{A}\sin p=k\sin p$；$p$ 由測量得出，k 由別的方法得出，因此太陽視差 p_0 就求出來了。

用下列方法測定 k：根據充分長的時間內對行星的地面觀測，可以定出行星對於太陽中心的軌道元素，以地球到太陽的平均距離爲距離的單位。知道了行星及地球對於太陽的軌道，可以算出任何時刻由地球到行星的距離 Δ，Δ 以地球到太陽的平均距離爲單位，卽 $\frac{\Delta}{A}$ 或 k 的值求出了。不錯，要準確地計算行星的軌道，需要能夠由觀測到的地面坐標 α' 及 δ' 算出其地心坐標 α 及 δ，但爲此需要知道此時還不能準確知道的行星的視差。然而用逐步近似的方法可以算出行星的軌道，其準確度對於計算太陽視差是足夠了，卽使得在測定地球到行星的距離時

誤差不超過距離的$\frac{1}{100000}$。

爲要準確地測定太陽視差，需要觀測那樣的行星，並在那樣的時候，使得Δ儘量比A小，即它的視差p儘量比太陽視差大。因此在十八和十九世紀，選擇了在衝時的火星。也用凌日時的金星（在金星的情形，觀測的方法和改正都與前面所說的不同，但我們不討論它；根據金星凌日來定出的太陽視差，並沒有使天文學家們滿意）。在十九世紀後半，爲此目的而觀測在衝時的小行星，因爲小行星沒有像火星那樣的顯著的圓面，因此它的地面坐標就可以測量到比有圓面和位相的火星準確得多。

在 1888—1889 年很多天文台對小行星維多利亞，伊里斯與撒浮的觀測，給出了很有價值的結果。十九世紀末，只用愛神星來作這件事，因它在某些衝時（1900—1901 年，和 1930—1931 年）到地球的距離只有太陽到地球距離的$\frac{1}{7}$，於是其視差達到$60''$。然而，這種觀測的方法和由它推出的太陽視差都與前面不同，我們只大略地討論它，只注意在 1930—1931 年根據愛神星的觀測對太陽視差的測定，此係由斯賓塞·鐘斯（Spencer Jones）所完成。

在上一世紀中葉已經知道太陽視差約爲$8''.6$；這對於得出行星的近似軌道是足夠了，可以由行星的地面坐標計算其地心坐標而把軌道要素改正更準確。根據天體力學定理計算出行星運動受大行星吸引的攝動，並造出行星的日心坐標表。

另外，還有地月系重心的受行星吸引的攝動運動表。爲要得出地球中心的坐標，需要在地球的運動中具有係數L的所謂的月行差加在重心C的被攝動的坐標上面。

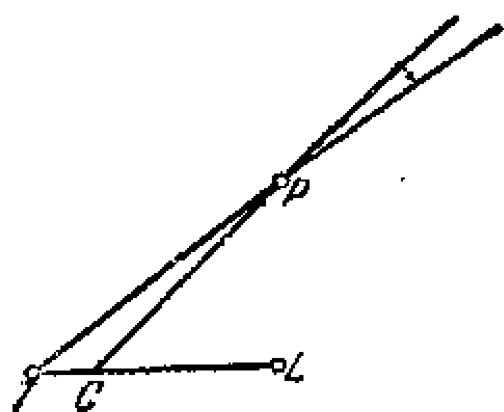


圖 44.

根據視差的理論，在任何時刻行星P（參看圖 44）的地心位置對於其重心位

置(卽由重心 C 所觀測到的位置)由 P 沿向月球的方向移動了角 TPC；T 和 L 爲此時地球和月球的中心的位置。由三角形 TPC 有：

$$\sin TPC=\frac{TC}{PC}\sin PTL\text{。}$$

用 μ 表示地球和月球的質量比率 $\frac{M_☽}{M}$，a' 表示月球繞地球運動的軌道的平均半徑，以太陽到地球的平均距離爲單位，我們得：

$$TC=TL\cdot\frac{\mu}{1+\mu}=a'\frac{TL}{a'}\times\frac{\mu}{1+\mu}=\frac{p_☉}{p_☽}\times\frac{TL}{a'}\times\frac{\mu}{1+\mu},$$

$$\sin TPC=\frac{p_☉}{p_☽}\times\frac{\mu}{1+\mu}\times\frac{TL}{a'}\times\frac{1}{PC}\sin PTL;$$

由於角 TPC 小：

$$TPC=206265''\times\frac{p_☉}{3422.5}\times\frac{\mu}{1+\mu}\times\frac{TL}{a'}\times\frac{1}{PC}\sin PTL=L\times K,$$

其中
$$L=206265\times\frac{p_☉}{3422.5}\times\frac{\mu}{1+\mu},$$

數值
$$K=\frac{TL}{a'}\times\frac{1}{PC}\sin PTL$$

由月球和行星運動的理論得出。

在一個月中地球中心繞着 C 點畫一個橢圓，在同一時間內所觀測到的行星的地心位置在天球上繞着行星的重心位置畫一個橢圓軌道。這個現象與從地球上看到的行星視位置與日心位置的差別完全相似，因爲地球在繞着太陽轉動。

取 $p_☉$ 和 μ 的最可靠的值，在計算行星的日心位置時，在地球運動中的月球不等式對行星在天球上的位置的影響需要考慮；量 $\frac{TL}{a'}$，PC 及角 PTL 已經充分準確地知道。

這樣，在觀測小行星(例如愛神星)之前，先計算它在最近地球時附近幾個月內的星曆表，卽計算每個格林尼治子夜它的地心赤經 A 和赤緯 D。然而它們不是被當爲完全準確的，但是認爲星曆表每天的改正

量 ΔA, ΔD 不作顯著變化，在一個月這樣的時間內，改正量與月球不等式無關，用公式 $a+bt+ct^2$ 表示已夠準確，而還要加上和月球項的不準確計算有關的改正量，即和公式 $\Delta L\times K$ 中所取 $p_\odot$ 和 μ 的值不準確有關的改正量。

有了這樣的準備，當愛神星接近地球時（在衝附近），在歐洲，南非洲，北美洲和南美洲的各個天文台裏，都拍了天空中以此行星爲中心的照片。有的照片是在行星中天時拍的，也有的是在中天前後行星時角較大時拍的。

由測量到的坐標，並藉助於所取的暫時的太陽視差值 $p_\odot$（其改正量爲 Δp），可得地心坐標。

要由行星的赤經測定這個改正量，首先是比較在同一地方同一晚上黃昏和早晨時的觀測；其次再把歐洲南非洲在中天後（早晨）的觀測和美洲在中天前（黃昏）的觀測加以比較。在第一種情形有方程式：

$$\alpha_e=A_e+\Delta A-\frac{\Delta p}{\Delta}\rho\cos\varphi'\sec\delta_e\sin t_e,$$

$$\alpha_y=A_y+\Delta A-\frac{\Delta p}{\Delta}\rho\cos\varphi'\sec\delta_y\sin t_y,$$

其中小字母 e 表示黃昏，y 表示早晨，A_y, A_e 爲星曆表上的坐標；ρ 是以地球赤道半徑爲單位。

把兩個方程式相減，ΔA 便被消去，但 Δp 的係數則增大，因 $\sin t_e<0$, $\sin t_y>0$。

在第二種情形中，在東西兩地差不多同時進行觀測，有方程式：

$$\alpha_e=A_e+\Delta A-\frac{\Delta p}{\Delta}\rho_e\cos\varphi_e'\sec\delta_e\sin t_e,$$

$$\alpha_w=A_w+\Delta A-\frac{\Delta p}{\Delta}\rho_w\cos\varphi_w'\sec\delta_w\sin t_w;$$

A_e, A_w 爲星曆表上的坐標；再消去 ΔA，而 $\sin t_e$ 和 $\sin t_w$ 又是符號相反。

在南北兩半球作許多近子午圈的觀測，將觀測結果加以綜合，就能

由視赤緯得出 Δp。

$$\delta_n = D + \Delta D - \frac{\Delta p}{\Delta}\rho_n(\sin\varphi'_n\cos D - \cos\varphi'_n\sin D\cos t_n),$$

$$\delta_s = D' + \Delta D - \frac{\Delta p}{\Delta}\rho_s(\sin\varphi'_s\cos D' - \cos\varphi'_s\sin D'\cos t_s)。$$

方程中 D 和 D' 相差很少，因差不多在同一時刻觀測，t_n 和 t_s 小，因觀測是在子午圈附近進行，緯度 φ'_n 和 φ'_s 有顯著的差別。兩方程式相減，使消去 ΔD，因 $\sin\varphi'_n$ 和 $\sin\varphi'_s$ 記號相反，故 Δp 的係數增加。

由行星的觀測，用這樣的方法得到了處理觀測時採用的太陽視差 $p_\odot$ 的三個改正值 Δp。當 Δp 計算出時，所求的視差就是和數 $p_\odot + \Delta p$。

斯賓塞·鐘斯用此方法，由 1930—1931 年在 24 個天文台對愛神星的觀測（由十月到次年四月的 2847 張照片）得到下面的太陽視差值：$8''.7900 \pm 0''.0013$；$8''.7875 \pm 0''.0009$；$8''.7907 \pm 0''.0011$，最後得 $8''.790 \pm 0.001$。

用所得到的視差值，由行星的地面坐標算出其地心坐標，其次用下述方法測定月球不等式的係數。選擇月球不等式對 α 及 δ 的影響都接近於零的觀測。由這些觀測確定行星星曆表中坐標的改正量，公式爲：

$$\Delta A = a + b(t - t_0) + c(t - t_0)^2 + d(t - t_0)^3,$$

$$\Delta D = a' + b'(t - t_0) + c'(t - t_0)^2 + d'(t - t_0)^3,$$

可用於一兩個月的時間範圍（到第三次項）。顯然，它們的獲得與月球不等式的誤差無關。然後再把這些改正量 ΔA，ΔD 擱進 α 和 δ 的其他觀測，由它們，分別地按 α 和 δ，定出在計算星曆表時採用的 L 值的改正量 ΔL。斯賓塞·鐘斯取 $L = 6''.4305$，對應的 $p_\odot = 8''.806$，$\mu =$ $= 1:81.53$，而得到改正量 $\Delta L = +0''.0085$，使得 $L = 6''.4390$。然後，用它所得到的值 $p_\odot = 8''.790$，他發現 $\mu = 1:(81.271 \pm 0.21)$。

根據 1896 年在巴黎的國際會議上的決議，由 1900 年起，在所有的天文曆書中都採用 $p_\odot = 8''.80$。到 1942 年爲止，太陽視差的最可靠的測定值爲：

	視差	可幾誤差
1889—1890 年對小行星維多利亞，伊里斯，和散浮的觀測	$8''.802$	$\pm 0''.005$
1900—1901 年對愛神星的目視觀測	$8''.806$	$\pm 0''.004$
1900—1901 年對愛神星的照相觀測	$8''.807$	$\pm 0''.0027$
1924 年對火星的照相觀測	$8''.809$	$\pm 0''.005$

因此，最可靠的值好像要比 $8''.800$ 稍大一些。斯賓塞·鐘斯的結果是出乎意外的。現在，對於為什麼得到這樣的難以理解的差別這個問題，天文學家們仍很關心。

§69. 日食和月掩星　周日視差公式也用在計算日食和月掩星的情況。根據現在的太陽和月球的運動表，可以計算太陽和月球很多年前和很多年後的地心 α 和 δ，且可確定它們在天空中的視中心接近到使得地面上某些地區能看到月球即便是蓋住太陽一部份的時刻(朔在黃白交點附近時)。由於視差位移，太陽和月球的相對位置和黑暗的月球在太陽面上的路徑對地上各地不同，所以得出了預測各地日食情況的很複雜的理論。在 1945 年蘇聯技術理論出版社出版的 A. A. 米哈依洛夫教授著的"食論"中有詳細的敘述。

我們只要討論對於地面上某給定地點日食情況的預測，該地點的緯度為 φ，向徑為 R，經度(由格林尼治向東)為 λ。在天文曆書中，對於食時載出了一些數據，可根據它們計算出在任何時刻太陽和月球的 α 和 δ；常常還給出了日心和月心的地心赤經 α 重合時的世界時 T，在此時刻它們的地心坐標及這些坐標的變化速度，還有它們的視差(和月球視差的變化速度)和地心角半徑(和月球半徑的變化速度)。根據這些數據，就可計算任何時刻，例如由 T 開始的每半小時的 $\alpha_{\odot}$，$\delta_{\odot}$，$\alpha_{☽}$，$\delta_{☽}$，$p_{\odot}$，$p_{☽}$。

然後對於這些時刻 T_1，T_2，⋯ 的每一個，計算當地的地方恆星時 s 和月球及太陽的地面坐標差。對於這種計算，近似公式就完全夠了，對於月球：

$$\alpha'_{☽}=\alpha_{☽}-\frac{R}{a}p_{☽}\cos\varphi'\sec\delta_{☽}\sin(s-\alpha_{☽}),$$

$$\delta'_{☽}=\delta_{☽}-\frac{R}{a}p_{☽}[\sin\varphi'\cos\delta_{☽}-\cos\varphi'\sin\delta_{☽}\cos(s-\alpha_{☽})]。$$

對於太陽需要應用相似的公式，但因 $p_{\odot}$ 很小，$p_{\odot}$ 和 $p_{☽}$ 的係數相差很少，故取下式就完全夠準確了：

$$\alpha'_{☽}-\alpha'_{\odot}=\alpha_{☽}-\alpha_{\odot}-(p_{☽}-p_{\odot})\frac{R}{a}\cos\varphi'\sec\delta_{☽}\sin(s-\alpha_{☽}),$$

$$\delta'_{☽}-\delta'_{\odot}=\delta_{☽}-\delta_{\odot}-(p_{☽}-p_{\odot})\frac{R}{a}[\sin\varphi'\cos\delta_{☽}-\cos\varphi'\sin\delta_{☽}\cos(s-\alpha_{☽})]。$$

把相對於日心的月心位置投影於和天球在日心相切的平面上，並取經過日心的時圈在此平面的投影為 y 軸(以赤緯增加的方向為正)，垂直於 y 軸的直線為 x 軸(赤經增加的方向為

正)。

則對於所考慮的時刻:

$$x=(\alpha_{\zeta}'-\alpha_{\odot}')\cos\delta_{\zeta}',\quad y=\delta_{\zeta}'-\delta_{\odot}',$$

其中把天球的小部份看做爲平面。最後對這些時刻 T_i 的每一個,根據近似公式(參看 §66)計算月球的地面視角半徑

$$\rho_{\zeta}'=\rho_{\zeta}\left(1+\frac{\rho_{\zeta}}{3438}\cos z\right),$$

其中 ρ_{ζ} 以角分爲單位;根據 z 的值,取 $\cos z$ 爲 1, $\frac{1}{2}$ 或 0; 甚至可以取 $\rho_{\zeta}'=\rho_{\zeta}$, 因它們的差不超過 $\frac{1'}{4}$。

x, y, ρ_{ζ} 和 $\rho_{\odot}$ 以角分爲單位,並在畫有方格的紙上,在直角坐標系中 (x 軸向右爲正, y 軸向上爲正)用尺度,例如: $1'=2\,mm$ 畫出一系列的點 $L_i(x_i, y_i)$ 對應於所取的時刻 T_i。這些點表示在地上某地所見的月球中心對於太陽的視運動。相鄰兩點間的距離應該由一點到另一點均勻地變化。

以原點爲中心,畫一半徑爲 $\rho_{\odot}+\rho_{\zeta}'$(近似地爲 $\rho_{\odot}+\rho_{\zeta}$)的圓;此圓與月球路徑的交點就是偏食開始和終了時的月心位置;測量它們和月球路徑上相鄰的點 L_i 間的距離,用簡單的內插法可確定偏食開始和終了時的時分數(分以下就不完全準確)。在同一圖上畫出一系列在選定時刻的月球圓面的位置,可以在圖上表出日食的各個階段,包括食甚,並可確定其時刻和食分(以太陽直徑爲單位)。對於全食的情況,若在某地發生全食,則由原點畫出,半徑爲 $\rho_{\zeta}'-\rho_{\odot}$的圓;它與月球路徑的交點定出全食開始和終了的時刻。若 $\rho_{\zeta}'<\rho_{\odot}$,則發生環食。然而,爲了避免大的誤差,對於全食,必須取大的尺度,例如 $1'=10\,mm$, 以準確地算到角分的小數。顯然地,在同一圖上,可以測定偏食及全食的初虧及復圓這些點對於太陽中心的位置角。

然而,必須注意,對於每一日全食,在天文年曆中載出相似的表和圖;特別是根據圖,容易算出準備觀測全食所需要的一切的量。

日全食的觀測對於天體物理的研究很重要。日偏食的觀測對於測定月球在朔時的坐標是重要的,在朔時不可能看見月球,除非它在太陽圓面上。

月掩星的觀測是測定月球中心的坐標的很簡單的,但同時又是很準確的方法。顯然,在掩始或掩終時,月球中心與恆星的距離爲月球的角半徑(若爲完全準確起見,需要考慮月球邊緣是不平的);月球半徑由別的方法測定(或甚至由很多次的掩星觀測推算出),這樣,由每次觀測就得到一個包含已知量(觀測時刻的世界時 T, 恆星的 α 和 δ, 月球半徑)和未知量 α_{ζ}, δ_{ζ} 的方程式。考慮到現在月球表的誤差隨着時間變化得很慢,可以由這種觀測確定表上坐標的改正量 $\Delta\alpha_{\zeta}$, $\Delta\delta_{\zeta}$。誤差小於 $\frac{1}{4}$ 秒的掩星時刻不難定出,而在 $\frac{1}{4}$ 秒內月球僅移動 $0''.13$; 所以,可近似確定月球位置到這樣的準確度。

掩星的預測與日食的預測相似。在天文年曆中給出了被掩恆星和月球中心的地心赤經

相等時的時刻 T，此時的恆星坐標 α_* 和 δ_*，月球坐標 $\alpha_\text{☽}$ 和 $\delta_\text{☽}$ 及其每小時變率 $\Delta\alpha$ 和 $\Delta\delta$，月球的視差和半徑(符號同前)。對於時刻 T 附近每隔一小時或半小時的一系列的時刻 T_i，根據前面的公式及月球中心的地面坐標 $\alpha'_\text{☽}$, $\delta'_\text{☽}$ 一個一個地算出月球的視差和地心坐標 $\alpha_\text{☽}$ 和 $\delta_\text{☽}$，記恆星對於月球中心的坐標爲 x 及 y:

$$x=(\alpha_*-\alpha_\text{☽})\cos\delta_\text{☽}+\frac{R}{a}p_\text{☽}\cos\varphi'\sin(s-\alpha_\text{☽}),$$

$$y=\delta_*-\delta_\text{☽}+\frac{R}{a}p_\text{☽}[\sin\varphi'\cos\delta_\text{☽}-\cos\varphi'\sin\delta_\text{☽}\cos(s-\alpha_\text{☽})]。$$

在方格紙上用適當尺度畫出月球圓面(取地心半徑就夠了)，註出坐標爲 x 及 y 的點，並用直線或折線連接起來(恆星對於月球中心的運動)。此線與月面圓周的交點表示對於時刻 T_i 的掩始和掩終時刻(恆星進入和離開月球圓面的時刻)。

爲要在同一圖中作很多次預測，最好引出另一種坐標 ξ, η 來代替 x, y; ξ, η 以月球半徑爲單位；爲此，x 和 y 必須除以 $\rho_\text{☽}$。則得:

$$\xi=\frac{x}{\rho_\text{☽}}=\frac{\alpha_*-\alpha_\text{☽}}{\rho_\text{☽}}\cos\delta_\text{☽}+\frac{p_\text{☽}}{\rho_\text{☽}}\times\frac{R}{a}\cos\varphi'\sin(s-\alpha_\text{☽}),$$

$$\eta=\frac{y}{\rho_\text{☽}}=\frac{\delta_*-\delta_\text{☽}}{\rho_\text{☽}}+\frac{p_\text{☽}}{\rho_\text{☽}}\times\frac{R}{a}[\sin\varphi'\cos\delta_\text{☽}-\cos\varphi'\sin\delta_\text{☽}\cos(s-\alpha_\text{☽})]。$$

這樣對於很多預測只須畫一次月球圓周，對每次掩註出坐標爲 ξ 及 η 的點。最近幾年來在天文年曆中給出了便於各地計算掩星的表。爲了大規模地展開這項工作，發明了特別的機器。其中一種是由雅可夫金(А. А. Яковкин)教授發明和製造的。

§70. 周年視差 由於視差，從太陽 S 和地球中心 T 看到的每個恆星 Σ (圖 45)是在兩個不同的方向 $S\Sigma$ 和 $T\Sigma$；二者之差，卽 $S\Sigma T$ 角，爲恆星 Σ 在由 S 移到 T 時的視差位移。由三角形 $S\Sigma T$，記 ST 爲 r，$S\Sigma$ 爲 Δ，角 $S\Sigma T$ 爲 p，則有 $\sin p=\frac{r}{\Delta}\sin ST\Sigma$。

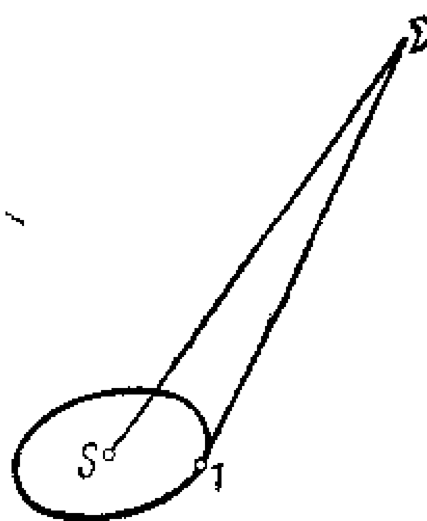


圖 45.

地球沿着它的軌道運動時，角 $ST\Sigma$ 在變化着：當地球的日心黃經等於恆星的日心黃經時，此角爲鈍角，當二者之差爲 180° 時，此角爲銳角，因爲此角連續地變化，不難看出，在地球軌道上有兩點，此角爲直角。

若把地球軌道當爲圓形，r 爲一常數，等於 a，則 p 的最大值 π 滿足

$\sin\pi=\frac{a}{\Delta}$，實際上因 $\pi<1''$，則用角秒作單位時 $\pi''=206265''\frac{a}{\Delta}$。

因此可以說：在地球軌道爲圓形的假定下，恆星周年視差爲在恆星處所看到的垂直於地球與恆星連線的地球軌道半徑所張的角度。

若 π 由觀測確定，則 Δ 由公式 $\Delta=\frac{206265''}{\pi''}a$ 算出。

若要考慮到地球軌道是橢圓形的，則本節的第一個公式應寫爲：$\sin p=\frac{a}{\Delta}\times\frac{r}{a}\sin ST\Sigma$。在此情形中 p 隨角 $ST\Sigma$ 和 r 而變化。可以令常數值 $\frac{a}{\Delta}$ 等於 $\sin\pi$，則在地球軌道爲橢圓形的假定下，π 就稱爲恆星的周年視差。可以說：恆星周年視差爲一直角三角形的小角，此三角形的斜邊爲太陽到恆星的距離，而小垂邊爲地球軌道半長徑。若 π 由觀測確定，則 Δ 由公式 $\Delta=\frac{206265''}{\pi''}\times a$ 計算出。

由於周年視差，恆星的地心坐標：黃經和黃緯 (λ', β')，赤經和赤緯 (α', δ') 就與日心的 λ, β, α, δ 不同，我們需要推出這些坐標差與周年視差值的關係的公式。一方面，這些公式可用來按觀測到的地心坐標計算出日心坐標和視差，而由視差算出太陽到恆星的距離；這對於認識恆星在空間的分佈，即關於恆星系的構造是很重要的。另一方面，這些公式可用於：當恆星的日心坐標及視差已知時，根據公式預先算出考慮到視差的恆星的地心位置，而載入天文年曆中。

§71. 黃經和黃緯的周年視差

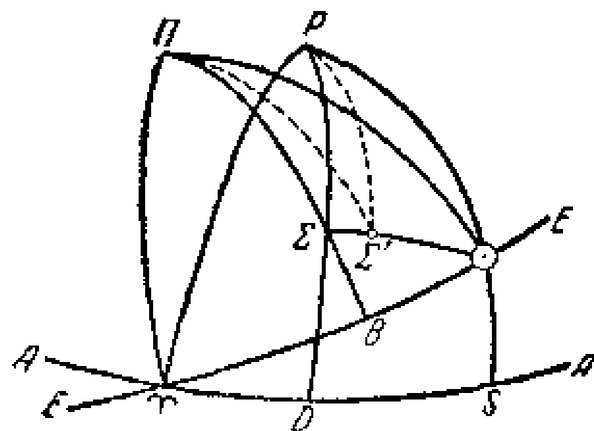


圖 46.

設在由外面看到的天球上（圖 46），Π 爲北黃極，EE 爲天赤道，Σ 爲恆星在所考慮時刻的日心位置，$\odot$ 爲太陽。根據視差位移定律，恆星的地心位置 Σ' 應在 $\Sigma\odot$ 上並在 Σ 和 $\odot$ 之間，且視差位移的值 $\Sigma\Sigma'$ 由公式 $\sin\Sigma\Sigma'=\frac{r}{\Delta}\sin\Sigma\odot$ 確定。可以

表爲下式：$\sin \Sigma\Sigma' = \frac{a}{\Delta} \times \frac{r}{a} \sin \Sigma\odot$，或引入周年視差$\pi$而成下面形式：$\Sigma\Sigma' = \sin \pi \frac{r}{a} \sin \Sigma\odot$，而由於$\pi$小，有$\Sigma\Sigma' = \pi \frac{r}{a} \sin \Sigma\odot$。黃緯的視差爲$\beta'-\beta$；黃經的視差爲$\lambda'-\lambda$。按窄三角形的定理(參看§13)，由三角形$\Sigma\Pi\Sigma'$有：

$$\beta'-\beta = \Sigma\Sigma' \cos \Pi\Sigma\Sigma'; \quad (\lambda'-\lambda)\cos\beta = \Sigma\Sigma' \sin \Pi\Sigma\Sigma'。$$

引入$\Sigma\Sigma'$的值得：

$$\beta'-\beta = \pi \frac{r}{a} \sin \Sigma\odot \cos \Pi\Sigma\Sigma';$$

$$(\lambda'-\lambda)\cos\beta = \pi \frac{r}{a} \sin \Sigma\odot \sin \Pi\Sigma\Sigma'。$$

又由球面三角形$\Pi\Sigma\odot$，記太陽黃經，卽$\Upsilon\odot$弧爲$\odot$，則有：$\Sigma\Pi\odot = \odot - \lambda$，並且因太陽黃緯可以忽略，故$\Pi\odot = 90°$，又有：

$$\sin \Sigma\odot \sin \Pi\Sigma\odot = \sin \Sigma\Pi\odot \sin \Pi\odot = \sin(\odot - \lambda),$$

及

$$\sin \Sigma\odot \cos \Pi\Sigma\odot = \cos \Pi\odot \sin \Pi\Sigma - \sin \Pi\odot \cos \Pi\Sigma \cos \Sigma\Pi\odot = \\ = -\sin\beta \cos(\odot - \lambda)。$$

因此得出視差如下：

$$\left.\begin{aligned} \beta'-\beta &= -\pi \frac{r}{a} \sin\beta \cos(\odot-\lambda), \\ (\lambda'-\lambda)\cos\beta &= \pi \frac{r}{a} \sin(\odot-\lambda)。\end{aligned}\right\} \quad (86)$$

λ，β，π根據問題的條件是已知的。$\frac{r}{a}$和$\odot$由地球運動表中取出，而更簡單地是由天文年曆中取出對於所討論時刻的值。若忽略地球軌道的偏心率，則$r=a$。

§72 赤經和赤緯的周年視差 用得出黃經和黃緯的視差的方法也可以得出赤經和赤緯的周年視差。在同一個圖46上，設P爲北天極，AA爲天赤道，$P\odot S$爲太陽的時圈，ΥS爲太陽的赤經α_0，$P\odot$爲

太陽的極距 $90^\circ-\delta_0$，而 δ_0 為太陽的赤緯。

與前面相似，由三角形 $P\Sigma\Sigma'$ 有：

$$\delta'-\delta=\Sigma\Sigma'\cos P\Sigma\Sigma';\quad (\alpha'-\alpha)\cos\delta=\Sigma\Sigma'\sin P\Sigma\Sigma';$$

$$\delta'-\delta=\pi\frac{r}{a}\sin\Sigma\odot\cos P\Sigma\Sigma';$$

$$(\alpha'-\alpha)\cos\delta=\pi\frac{r}{a}\sin\Sigma\odot\sin P\Sigma\Sigma'。$$

由三角形 $P\Sigma\odot$ 有：$\Sigma P\odot=(\alpha_0-\alpha)$，並且又有：

$$\sin\Sigma\odot\sin P\Sigma\odot=\sin(\alpha_0-\alpha)\sin(90^\circ-\delta_0)=\cos\delta_0\sin(\alpha_0-\alpha),$$

$$\begin{aligned}\sin\Sigma\odot\cos P\Sigma\odot&=\cos(90^\circ-\delta_0)\sin(90^\circ-\delta)-\\&-\sin(90^\circ-\delta_0)\cos(90^\circ-\delta)\cos(\alpha_0-\alpha)=\\&=\cos\delta\sin\delta_0-\sin\delta\cos\delta_0\cos(\alpha_0-\alpha)。\end{aligned}$$

因此

$$\left.\begin{aligned}(\alpha'-\alpha)\cos\delta&=\pi\frac{r}{a}\cos\delta_0\sin(\alpha_0-\alpha),\\ \delta'-\delta&=\pi\frac{r}{a}[\cos\delta\sin\delta_0-\sin\delta\cos\delta_0\cos(\alpha_0-\alpha)]。\end{aligned}\right\}\qquad(87)$$

恆星的 α, δ, π 仍然認為已知，而 r, α_0, δ_0 對給定時刻可由天文年曆中取出。若忽略地球軌道的偏心率，則令 $r=a$。

所求出的式子可以更簡化，若用下列式子（由三角形 $\Upsilon\odot S$）先消去 α_0 和 δ_0：

$$\cos\delta_0\sin\alpha_0=\sin\odot\cos\varepsilon;\quad \cos\delta_0\cos\alpha_0=\cos\odot;$$

$$\sin\delta_0=\sin\odot\sin\varepsilon。$$

則得：

$$(\alpha'-\alpha)\cos\delta=\pi\frac{r}{a}[\sin\odot\cos\varepsilon\cos\alpha-\cos\odot\sin\alpha],$$

$$\delta'-\delta=\pi\frac{r}{a}[\cos\delta\sin\odot\sin\varepsilon-\sin\delta\cos\alpha\cos\odot-\sin\delta\sin\odot\cos\varepsilon\sin\alpha]。$$

然後引入只與恆星坐標以及 ε 有關的量 m, M, n, N：

$$m \sin M = \sin \alpha, \quad n \sin N = \sin \delta \cos \alpha,$$
$$m \cos M = \cos \alpha \cos \varepsilon, \quad n \cos N = \cos \delta \sin \varepsilon - \sin \delta \cos \varepsilon \sin \alpha 。$$

則得

$$\left.\begin{aligned} (\alpha' - \alpha)\cos \delta &= \pi \frac{r}{a} m \sin(\odot - M), \\ \delta' - \delta &= \pi \frac{r}{a} n \sin(\odot - N)。 \end{aligned}\right\} \tag{88}$$

對於給定的恆星(即在 m, M, n, N 爲常數時),若需要計算它在一年中各日的視差,即對於不同的 $\odot$ 值的視差,這些式子是方便的。

§73. 由於周年視差,恆星的地心位置在天球上所畫的圖形 $\odot$, α_0, δ_0, r 的值在一年中連續地變化,而一年後又重複以前的值,不過要忽略行星對地球運動的攝動,π 小時這是完全可以的。因此 Σ' 對於 Σ 一年內在天球上畫出一條閉曲線。

若取地球軌道爲圓形,根據公式(86)

$$(\lambda' - \lambda)\cos \beta = \pi \sin(\odot - \lambda); \quad \beta' - \beta = -\pi \sin \beta \cos(\odot - \lambda);$$

若令 $(\lambda' - \lambda)\cos \beta = x$, $\beta' - \beta = y$, 並消去 $\odot$ 值,則得出曲線方程式:

$$x^2 + \left(\frac{y}{\sin \beta}\right)^2 = \pi^2 \text{ 或 } \frac{x^2}{\pi^2} + \frac{y^2}{(\pi \sin \beta)^2} = 1,$$

即曲線爲橢圓,其軸等於 $\pi \sin \beta$ 和 π,且方向分別爲黃經圈和黃經圈的垂線。橢圓長徑與恆星黃緯無關,等於視差的兩倍。恆星的日心位置位於橢圓的中心。

若想要在地球軌道爲橢圓的假定下來設想圖形的形式,則採用幾何的討論是比較清楚的和有益的。若經過天球中心,向天球面作直線,平行於由地球軌道上不同位置看恆星的方向,則這些直線在天球面上組成了一個圖形,若從天球外面看來,正與在恆星處看地球軌道的圖形相同,只是轉了 180°。所以此圖形仍爲橢圓,日心位置不在橢圓中心,而在橢圓的一個焦點上,且其長徑不等於恆星周年視差的兩倍。

§74. 由觀測測定恆星周年視差 根據 §72 的公式(87)有:

$$(\alpha'-\alpha)\cos\delta=\pi\frac{r}{a}\cos\delta_0\sin(\alpha_0-\alpha),$$

$$\delta'-\delta=\pi\frac{r}{a}[\cos\delta\sin\delta_0-\sin\delta\cos\delta_0\cos(\alpha_0-\alpha)]。$$

觀測給出了 α' 和 δ'。若 α 和 δ 不隨時間變化，且差 $\alpha'-\alpha$ 和 $\delta'-\delta$ 只隨視差而變化，則根據在一年內定出的一些高度準確的 α' 和 δ' 值，可以準確地確定 α, δ 和 π，因公式中其他的值都知道得充分準確。但由於歲差章動和恆星自行，α 和 δ 都在變化，而差 $(\alpha'-\alpha)$ 和 $(\delta'-\delta)$，除視差外，還與光行差有關。因此，恆星周年視差的所謂*絕對的*測定，只有當能夠由觀測確定 α 和 δ，並能考慮這些變化和影響準確到 $0''.01$ 或甚至到 $0''.001$ 的時候才是可能的。但這是不可能的。因此只能測定恆星的所謂*相對的*視差

令 $S_1(\alpha_1, \delta_1)$, $S_2(\alpha_2, \delta_2)$ 爲兩個恆星，彼此在天球上很靠近，使得 S_1S_2 弧只有幾分。則歲差，章動和光行差對此二星的影響可認爲*相同*，其誤差甚至比在測量它們的坐標差時所產生的不可避免的誤差還要小，必須注意，兩個靠近的恆星的坐標差可以測量得比坐標本身準確得很多。只需考慮恆星的自行；令 μ_1, μ_2 爲二恆星的赤經自行，α_1, α_2 爲它們在某時刻 t_0 時的日心赤經；則在任何時刻 t 時的赤經爲：α_1+ $+\mu_1(t-t_0)$ 和 $\alpha_2+\mu_2(t-t_0)$，其差爲 $\alpha_1-\alpha_2+(\mu_1-\mu_2)(t-t_0)$。如上所說，若 $\alpha_1-\alpha_2$ 不大時，此差受歲差，章動和光行差的影響非常小。

對於時刻 t_0，把(87)的第一公式應用於兩個相靠近的恆星，得：

$$(\alpha_1'-\alpha_1)\cos\delta=\pi_1\frac{r_0}{a}\cos\delta_0\sin(\alpha_0-\alpha),$$

$$(\alpha_2'-\alpha_2)\cos\delta=\pi_2\frac{r_0}{a}\cos\delta_0\sin(\alpha_0-\alpha),$$

因爲 $\cos\delta_1$ 和 $\cos\delta_2$ 或 $\sin(\alpha_0-\alpha_1)$ 和 $\sin(\alpha_0-\alpha_2)$ 的差的影響很微小。

所以，

$$[(\alpha_1'-\alpha_2')-(\alpha_1-\alpha_2)]\cos\delta=(\pi_1-\pi_2)\frac{r_0}{a}\cos\delta_0\sin(\alpha_0-\alpha)。$$

這是在 t_0 時的方程式。

對於時刻 t，方程式爲：

$$(\alpha_1'-\alpha_2')\cos\delta-(\alpha_1-\alpha_2)\cos\delta-(\mu_1-\mu_2)(t-t_0)\cos\delta=$$

$$=(\pi_1-\pi_2)\frac{r}{a}\cos\delta_\odot\sin(\alpha_\odot-\alpha);$$

r，$\delta_\odot$，$\alpha_\odot$ 都是在 t 時的值。在此方程中，$(\alpha_1'-\alpha_2')\cos\delta$ 爲觀測時所測量到的值，$(\alpha_1-\alpha_2)\cos\delta$，$(\mu_1-\mu_2)\cos\delta$ 和$(\pi_1-\pi_2)$爲三個未知量，其餘的量都知道得充分準確。設在一年內有三個時刻 t_0，t_1，t_2，在這些時刻$(\pi_1-\pi_2)$的係數彼此相差儘可能大，則祇須要在這三個時刻做三次$(\alpha_1'-\alpha_2')\cos\delta$ 的測量就足夠確定未知量了。

實際上，對於每一個恆星，是當他的視差位移接近於最大值的那個月份裏才進行測量，即在三個曆元，每兩個相差爲半年，或在五個或甚至更多的曆元。爲提高準確度起見，在每個曆元進行幾個晚上的觀測，把所得到的三個未知量的 n 個方程式用最小二乘法解出來。這樣一來，周年視差的差 $\pi_1-\pi_2$ 就得到了。

在實際測量中，取一個較亮的星，例如 S_1，再取一個淡弱的星 S_2，估計到淡星的視差比亮星小得很多。爲查驗起見，常常再在 S_1 的另一邊取第二個淡星 S_3。那麼若 $\pi_1-\pi_2$ 和 $\pi_1-\pi_3$ 相近，就證實了 π_2 和 π_3 與 π_1 比較起來是小的。根據許多次相對視差的測定，可推出求淡星的平均視差的公式(此平均視差與其星等有關)，卽近似地確定了 π_2 和 π_3。此後，π_1 的最終值就求出來了。

現在，恆星周年視差測量的誤差爲 $\pm0''.01$，很少小於此誤差。

有一些其他的更準確的求周年視差的公式，但僅用於一些特別的恆星，並不是天空中所有的恆星都能用。

§75. 行星和彗星的地心坐標和日心坐標 這些坐標之間的差別也可以看做周年視差的後果，但因行星和彗星的距離(當彗星離行星系的界限不遠時)和地球到太陽的距離比起來相差很少，故在此情形下，

視差位移爲很大的角，甚至達 180°。因此，前面推出的公式不能用了，由日心坐標計算地心坐標（或相反）簡單地根據直角坐標轉換公式，不加任何變化。

設 α, δ, Δ, 及 α', δ', Δ' 爲行星或彗星的日心坐標及地心坐標，A, D, R 爲太陽的地心坐標。向量 Δ'（由地球向行星）可視爲向量 R（由地球向太陽）和向量 Δ（由太陽向行星）的幾何的和。因此，選擇直角坐標系：x 軸向春分點，y 軸向天赤道上赤經爲 90° 的那點，z 軸向天球北極，把向量 Δ', Δ, R 投影在此三軸上。則得下列三方程式：

$$\Delta' \cos\delta \cos\alpha' = \Delta \cos\delta \cos\alpha + R \cos D \cos A,$$

$$\Delta' \cos\delta' \sin\alpha' = \Delta \cos\delta \sin\alpha + R \cos D \sin A,$$

$$\Delta' \sin\delta' = \Delta \sin\delta + R \sin D,$$

正面及反面的問題就用此三方程式解出來。爲了使類似的計算方便起見，在天文年曆中，對每一格林尼治子夜，給出了太陽在此坐標系中的直線坐標：

$$X = R\cos D\cos A,\quad Y = R\cos D\sin A,\quad Z = R\sin D。$$

第九章　光行差

§76. 基本概念；問題的建立　光行差是這樣一種現象：運動着的觀測者所見的天體的方向，與他靜止時在同一時刻所見的天體的方向不同。觀測者所觀測到的天體的視方向，與同一時刻靜止的觀測者所觀測到的天體的眞方向之差就稱爲光行差。

從光行的理論的觀點來解釋這種現象是十分簡單的。假設在圖 47 中，甲表示觀測者靜止時的觀測；他安置好望遠鏡，使天體的光通過物鏡，物鏡的中心以字母 O 表示，並且通過望遠鏡筒，成天體的像於十字網絲交點 K 上的物鏡焦點，每一個望遠鏡都有這種十字網絲，這是用來量度坐標的；這時直線 KO 的方向也就是觀測者所見天體的方向，它與由 O 至天體的方向相合。假若（圖 47，乙）觀測者向點 A 的方向運動，而望遠鏡則保持原來的方向，那末在那短時間 τ 內，當光沿望遠鏡筒由 O 傳至 K 時，點 K 本身已經向 A 移動了 KK'，KK' 之長爲 τV，V 表示觀測者的速度；因此沿原來方向 SO 所得的天體的像，已經不在十字絲上了，十字絲離開它的距離爲 τV。所以，爲了要使天體的像成在十字絲上，

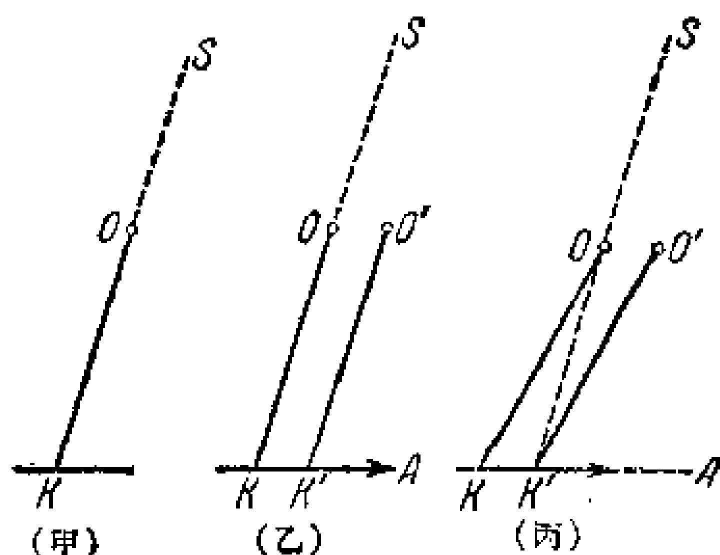


圖　47.

運動着的觀測者就必須改變望遠鏡筒的方向，把物鏡轉向前方使直線 OK 傾斜（圖 47，丙），使在時間 τ 內，當光從 O 行至 K' 時，K 已經移至 K' 而與天體的像相重合。

假若從觀測者至天體的實際方向 $K'OS$ 與觀測者速度的方向之間的角 $SK'A=OK'A$ 以字母 ψ 表示，而觀測者所見天體的視方向 KO 與

速度的方向之間的角 OKA 以字母 φ 表示，那末由上述的理由可以看出，$\varphi<\psi$，也就是說由於光行差的緣故，看起來天體較靠近點 A 一些；點 A 在天球上稱爲觀測者運動的奔赴點；因此簡言之，光行差使天體靠近了奔赴點。差 $\psi-\varphi$，即光行差本身，是容易算出來的。在三角形 $KK'O$ 中角 $OKA=\varphi$，$OK'A=\psi$，因此 $\psi-\varphi=K'OK$；再進一步，若以字母 c 表示光的傳播速度，以字母 V 表示觀測者的運動速度，那末 $OK'=c\tau$，$K'K=V\tau$，且

$$\frac{\sin K'OK}{V\tau}=\frac{\sin\varphi}{c\tau},$$

由是

$$\sin(\psi-\varphi)=\frac{V}{c}\sin\varphi。$$

因爲事實上 V 與 c 比起來總是很小的，所以角 $\psi-\varphi$ 也小，實際上小於 $21''$；因此可以用 $\psi-\varphi$ 代替 $\sin(\psi-\varphi)$ 且右邊寫成 φ 或 ψ 都可以（參考§6 的第 4 段末了），所引起的誤差小於 $0''.001$。因而光行差 $a=\psi-\varphi$，可以表如：

$$\left.\begin{aligned} a&=\psi-\varphi=\frac{V}{c}\sin\varphi \text{ 或 } \frac{V}{c}\sin\psi, \text{單位爲弧度}, \\ \text{或者}\quad a&=206265''\frac{V}{c}\sin\psi, \text{單位爲角度秒。} \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

根據光的波動說及相對論的觀點，光行差的現象比上述的複雜；這裏牽涉到光在運動着的物體中傳播的問題，但是這個問題的嚴密研究指出，所推出的公式代表實際的情況，可是有誤差，這誤差不能被任何天文觀測所察覺。因此上列光行差公式在所有天文計算中都應用着。

不被光行差所畸變的天體在天球上的坐標（位置）稱爲眞坐標（位置），被光行差所畸變的稱爲視[1]坐標（位置）。顯然，天體的所有觀測到的坐標都被光行差所畸變，所以爲了進一步的應用坐標，應當消除光

[1] "視"這一字表示，我們只可以沿被光行差改變了的方向去看（觀測）天體，而不能沿觀測時觀測者及天體在空間裏的位置的連線去看。但此外，"視"一字還有似是而非的意思。

行差的影響。

在§23中描述了地球中心的複雜運動；對此還應當加上由於地球自轉而引起的觀測者的運動。然而在光行差的理論中平常只需要考慮到這些運動中的兩種：(1)地球的自轉；最大速率約爲0.5公里/秒；消除觀測坐標中的這種周日光行差以後，即得假若地球沒有自轉時所將得的坐標，(2)地球中心以約30公里/秒的速率繞太陽的周年公轉；從這種運動可得所謂的周年光行差；消除了觀測坐標中的周年光行差以後，就得到相當於觀測者位於太陽中心時的坐標，但未考慮到視差的影響。在地球中心繞地月系的質量中心的運動中，以及在因木星及土星的吸引而生的太陽中心的運動中，速度都不大（爲：0.0126；0.0125及0.0027公里/秒），所以只有在特別精密的研究中才注意到由它們而生的光行差（$0''.0085$，$0''.0085$，$0''.0019$）。

整個太陽系在很長的時間裏的運動速度，按大小和方向而言都是固定的；由它所引起的每個恆星的眞坐標的改變，在這樣的時間中是不變的，並無考慮到它的必要。因此以後我們的問題在於求出，周年光行差怎樣改變天體的坐標λ和β，以及α和δ，又周日光行差怎樣改變z和A，以及t，α和δ。

§77．黃經和黃緯的周年光行差　在計算周年光行差時，我們認爲地球是沿橢圓而繞日運動的；不必注意到攝動；因此地球的速度V位於黃道平面上，奔赴點A的黃緯是$0°$，奔赴點的黃經比太陽黃經($\odot$)約小$90°$，更準確些爲$90°+\eta$。V及η與太陽黃經的關係我們已經在§23中研究過了。若只準確到地球軌道偏心率的一次冪，那末由公式(38)及(39)得：

$$V=\frac{2\pi a}{P\sqrt{1-e^2}}(1+e\cos v)=V_0[1-e\cos(\odot-w)],$$

$$\tan\eta=\sin\eta=\eta=e\sin v=-e\sin(\odot-w)。$$

以字母k代表量$206265''\ \frac{V}{c}$；因爲V約等於30公里/秒，而$c=$

$=300{,}000$ 公里/秒，所以 k 約等於 $20\,{}^{1}/_{2}''$。

在圖 48 中 Π 爲黃極，$\Upsilon AB\odot$ 爲黃道，$\odot$ 爲太陽的位置，A 爲地球周年運動的奔赴點。以符號 $\odot$ 表示太陽的黃經；則奔赴點的黃經等於 $\odot-(90°+\eta)$。設 S 爲恆星的眞位置；我們以 λ 表示它的黃經 ΥB，以字母 β 表示它的黃緯 SB。被光行差所畸變的視位置爲 S'；其黃經及黃緯以 λ' 及 β' 表示。根據光行差定律 S' 位於大圓 SA 的弧上在 S 及 A 之間且 $SS'=k\sin SA$；因爲 k 以及光行差位移 SS' 都不超過 $21''$，所以我們可以應用關於窄球面三角形的理論（參考 §13），來研究黃經和黃緯的光行差，也就是研究 SS' 在黃緯圈以及垂直於黃緯圈的圓上的投影。從圖中可以看出，我們有

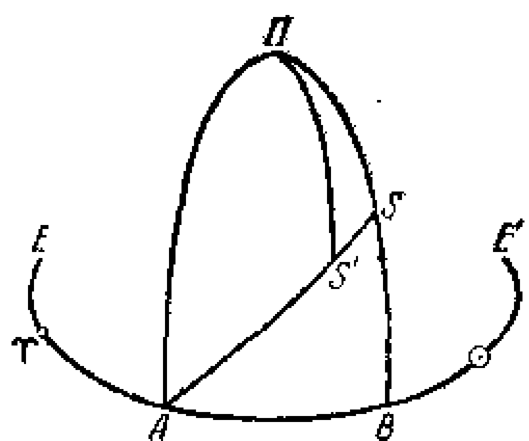


圖　48.

$$\beta-\beta'=SS'\cos ASB;\ (\lambda-\lambda')\cos\beta=SS'\sin ASB;$$

引入式子 $SS'=k\sin SA$，卽得

$$\beta-\beta'=k\sin SA\cos ASB,$$

$$(\lambda-\lambda')\cos\beta=k\sin SA\sin ASB\,。$$

但在三角形 ASB 中有：

$$ABS=90°;\ \ BS=\beta;$$

$$AB=\lambda-[\odot-(90°+\eta)]=90°-(\odot-\lambda-\eta)。$$

因此

$$\sin SA\cos ASB=\cos AB\sin SB=\sin\beta\sin(\odot-\lambda-\eta),$$

$$\sin SA\sin ASB=\sin AB=\cos(\odot-\lambda-\eta)。$$

將這些式子代入 $\beta-\beta'$ 及 $(\lambda-\lambda')\cos\beta$ 的式中，就得到：

$$\beta-\beta'=k\sin\beta\sin(\odot-\lambda-\eta),$$

$$(\lambda-\lambda')\cos\beta=k\cos(\odot-\lambda-\eta),$$

因此被光行差改變了的 β' 及 λ' 等於

$$\left.\begin{aligned}\beta'&=\beta-k\sin\beta\sin(\odot-\lambda-\eta),\\ \lambda'&=\lambda-k\sec\beta\cos(\odot-\lambda-\eta)。\end{aligned}\right\}\qquad(90)$$

這裏，正如所說過的一樣：

$$k=206265''\frac{V}{c}=\frac{206265''}{c}\times\frac{2\pi a}{P\sqrt{1-e^2}}[1-e\cos(\odot-w)]$$

又
$$\eta=-e\sin(\odot-w)。$$

若忽略帶有 e 的項，那末在一年內 k 是不變的，且等於

$$\frac{206265''}{c}\cdot\frac{2\pi a}{P\sqrt{1-e^2}}=k_0\text{ 及 }\eta=0。\qquad(91)$$

量 k_0 稱爲光行差常數。

假若在公式中保留帶有 e 的一次冪的項，那末代入 k 及 η 的式子以後公式(90)變成：

$$\begin{aligned}\beta'&=\beta-k_0[1-e\cos(\odot-w)]\times\\ &\quad\times[\sin(\odot-\lambda)+\cos(\odot-\lambda)e\sin(\odot-w)]\sin\beta,\\ \lambda'&=\lambda-k_0[1-e\cos(\odot-w)]\times\\ &\quad\times[\cos(\odot-\lambda)-\sin(\odot-\lambda)e\sin(\odot-w)]\sec\beta。\end{aligned}$$

各括弧相乘時，僅保留 e 的一次冪，即得：

$$\left.\begin{aligned}\beta'&=\beta-k_0[\sin(\odot-\lambda)-e\sin(w-\lambda)]\sin\beta,\\ \lambda'&=\lambda-k_0[\cos(\odot-\lambda)-e\cos(w-\lambda)]\sec\beta。\end{aligned}\right\}\qquad(92)$$

忽略帶有 e 的各項，得：

$$\left.\begin{aligned}\beta'&=\beta-k_0\sin(\odot-\lambda)\sin\beta,\\ \lambda'&=\lambda-k_0\cos(\odot-\lambda)\sec\beta。\end{aligned}\right\}\qquad(93)$$

將這兩式與公式(92)相較，即可看出，它們彼此相差僅在不大的項，這些項與 $\odot$ 無關，也就是說與地球的運動無關；因而在每個恆星的坐標加上了一個小的量，這個量決定於 e, w, λ 和 β，也就是說這個量並不是完全不變的，因爲 λ 和 β 都在慢慢地變化(e 及 w 的變化可以完全忽略不計)，不過變得很慢；我們並不單獨地考慮它，它是恆星的日心坐標

λ 和 β 的一部份。若需要特別的準確度,就要考慮到它了;我們要注意 $k_0 e = 0''.34$。

在 k 小的情形下,可以把 S' 在一年中繞 S 所描出的圖形當作是平面的。忽略了帶有 e 的各項並記住 $(\lambda'-\lambda)\cos\beta = x$, $\beta'-\beta = y$, 卽得:

$$x = -k_0 \cos(\odot - \lambda), \quad y = -k_0 \sin\beta \sin(\odot - \lambda)。$$

把 $\odot$ 從這兩個方程式中消去以後,得:

$$\left(\frac{x}{k_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{k_0 \sin\beta}\right)^2 = 1,$$

這是一個橢圓的方程式,其長徑為 k_0,卽 $20''.5$,對於所有的恆星都是一樣的,而短徑等於 $k_0 \sin\beta = 20''.5 \sin\beta$。對於在黃極上的恆星,這橢圓就轉變成半徑為 $20''.5$ 的圓。對於在黃道上的恆星,它就變成長 $41''$ 的一段弧。

圖 49.

§78. 赤經和赤緯的周年光行差 求用它的方法完全與求黃經和黃緯的光行差的方法相同。在圖 49 中字母 S, S', A 的意義與在圖 48 中一樣; P 為極, PSD 為赤經圈,赤道弧 ΥD 為恆星 S 的赤經 α; $PS = 90^\circ - \delta$, 角 $A\Upsilon D$ 為黃赤交角 ε。將 SS' 投影於赤經圈及與之垂直的大圓,由窄三角形 SPS' 得下式:

$$PS - PS' = 90^\circ - \delta - (90^\circ - \delta') = \delta' - \delta = SS' \cos PSA =$$
$$= k \sin SA \cos PSA = -k \sin SA \cos ASD。$$

但由三角形 SAD 有:

$$\sin SA \cos ASD = \cos AD \sin SD - \sin AD \cos SD \cos SDA =$$
$$= \cos AD \sin\delta - \cos\delta \sin AD \sin AD\Upsilon,$$

而由三角形 $AD\Upsilon$ 有:

$$\cos AD = \cos \Upsilon A \cos \Upsilon D + \sin \Upsilon A \sin \Upsilon D \cos A\Upsilon D,$$

但 ΥA (奔赴點的黃經)等於 $\odot-(90^\circ+\eta)=\odot-\eta-90^\circ$。因此

$$\cos AD=\sin(\odot-\eta)\cos\alpha-\cos(\odot-\eta)\sin\alpha\cos\varepsilon。$$

此外,由同一個三角形 ΥAD 有:

$$\sin AD\sin AD\Upsilon=\sin A\Upsilon\sin\varepsilon=-\cos(\odot-\eta)\sin\varepsilon。$$

將 $\cos AD$ 及 $\sin AD\sin AD\Upsilon$ 的式子代入 $\sin SA\cos ASD$ 的式子,得:

$$\delta'-\delta=\delta_{視}-\delta_{真}=$$
$$=-k\sin\delta[\sin(\odot-\eta)\cos\alpha-\cos(\odot-\eta)\sin\alpha\cos\varepsilon]-$$
$$-k\cos\delta\cos(\odot-\eta)\sin\varepsilon=-k\sin(\odot-\eta)\cos\alpha\sin\delta-$$
$$-k\cos(\odot-\eta)[\cos\delta\sin\varepsilon-\sin\delta\cos\varepsilon\sin\alpha]。$$

$a'-a$ 的推導與 $\delta'-\delta$ 的推導相同;由圖得:

$$(a-a')\cos\delta=SS'\sin PSA=k\sin SA\sin PSA=k\sin SA\sin ASD,$$

但由三角形 ASD:

$$\sin SA\sin ASD=\sin AD\sin ADS=\sin AD\cos AD\Upsilon,$$

而由三角形 $AD\Upsilon$:

$$\sin AD\cos AD\Upsilon=\cos\Upsilon A\sin\Upsilon D-\sin\Upsilon A\cos\Upsilon D\cos\varepsilon=$$
$$=\sin(\odot-\eta)\sin\alpha+\cos(\odot-\eta)\cos\alpha\cos\varepsilon。$$

因此,

$$(a-\alpha')\cos\delta=k\sin(\odot-\eta)\sin\alpha+k\cos(\odot-\eta)\cos\alpha\cos\varepsilon。$$

由此得:

$$\alpha_{測}=\alpha_{真}-k\sin(\odot-\eta)\sin\alpha\sec\delta-k\cos(\odot-\eta)\cos\alpha\cos\varepsilon\sec\delta。$$

把地球的運動當作橢圓的,在 $(\alpha'-\alpha)$ 及 $(\delta'-\delta)$ 的式子中以量 $k_0(1+e\cos v)$ 代 k,以量 $e\sin v$ 代 η,且忽略帶有 e^2 的各項。於是得:

$$k\sin(\odot-\eta)=k_0(1+e\cos v)\sin(\odot-e\sin v)=$$
$$=k_0(1+e\cos v)(\sin\odot-e\sin v\cos\odot)=$$
$$=k_0\sin\odot+k_0e\sin(\odot-v)=k_0e\sin\odot-k_0e\sin w,$$

$$k\cos(\odot-\eta)=k_0(1+e\cos v)\cos(\odot-e\sin v)=$$

$$=k_0(1+e\cos v)(\cos\odot+e\sin v\sin\odot)=$$
$$=k_0\cos\odot+k_0e\cos(\odot-v)=k_0\cos\odot-k_0e\cos w,$$

因為 $\odot=180^\circ+v+w$(§23)。

將 $k\sin(\odot-\eta)$ 及 $k\cos(\odot-\eta)$ 的這兩個式子代入 $(\alpha'-\alpha)$ 及 $(\delta'-\delta)$的式子中,得:

$$\alpha'-\alpha=-(k_0\sin\odot-k_0e\sin w)\sin\alpha\sec\delta-$$
$$-(k_0\cos\odot-k_0e\cos w)\cos\alpha\cos\varepsilon\sec\delta,$$
$$\delta'-\delta=-(k_0\sin\odot-k_0e\sin w)\cos\alpha\sin\delta-$$
$$-(k_0\cos\odot-k_0e\cos w)(\tan\varepsilon\cos\delta-\sin\alpha\sin\delta)\cos\varepsilon。$$

最後,將帶有 e 的項與其他的項分開,得:

$$\left.\begin{aligned}\alpha'_{\text{視}}-\alpha_{\text{真}}=&-k_0(\sin\alpha\sin\odot+\cos\alpha\cos\odot\cos\varepsilon)\sec\delta+\\&+k_0e(\sin\alpha\sin w+\cos\alpha\cos w\cos\varepsilon)\sec\delta,\\\delta'_{\text{視}}-\delta_{\text{真}}=&-k_0\sin\odot\cos\alpha\sin\delta-k_0\cos\odot\cos\varepsilon(\tan\varepsilon\cos\delta-\\&-\sin\alpha\sin\delta)+k_0e[\sin w\cos\alpha\sin\delta+\\&+\cos w\cos\varepsilon(\tan\varepsilon\cos\delta-\sin\alpha\sin\delta)]。\end{aligned}\right\}\quad(94)$$

又像在 λ 和 β 的情形,我們要注意,包含着 e 的小項並不決定於太陽的黃經 $\odot$; 這表示,它們對於每一個恆星都幾乎是不變的,它們僅僅由於 α 及 δ 因歲差的變化而改變,因此加在日心坐標上,α 及 δ 因周年光行差而產生的變化與假定地球在軌道上的速度永遠是 V_0 且垂直於向徑時的變化一樣,但是太陽黃經的變化是不均勻的,因為(注意這一點)在所有我們的公式中太陽的黃經 $\odot$ 是它的在地球的橢圓運動中的實黃經。

與周年視差一樣,如果引入量 m, M, n 及 N, 那末我們可以把 $\alpha'-\alpha$ 及 $\delta'-\delta$ 的公式寫成簡單的形式,所引入的量適合下式:

$$m\sin M=\sin\alpha,\qquad n\sin N=\sin\delta\cos\alpha,$$
$$m\cos M=\cos\alpha\cos\varepsilon,\qquad n\cos N=\cos\delta\sin\varepsilon-\sin\delta\cos\varepsilon\sin\alpha。$$

經過簡單的變換之後得:

$$\left.\begin{aligned}(\alpha'-\alpha)\cos\delta&=-k_0 m\cos(\odot-M)+k_0 e\cos(w-M),\\ \delta'-\delta&=-k_0 n\cos(\odot-N)+k_0 e\cos(w-N)。\end{aligned}\right\}\qquad(95)$$

顯然，從形式方面看來周年視差和光行差對於恆星位置的影響完全相似：在第一種情形下恆星向着太陽位移，在第二種情形下向着奔赴點，且都是按照同樣的規律——與由恆星至太陽或至奔赴點的弧的正弦成正比，只是常數 π 及 k 不同．所以假若以 $\odot-90°$ 代替 $\odot$，我們就可以從視差的公式得到光行差的公式．實際上，這樣代入以後光行差的主要的項就可以從視差公式求出來。

引入下列的符號，我們還可以把 $(\alpha'-\alpha)$ 及 $(\delta'-\delta)$ 的公式化成更簡單的形式。

$$\left.\begin{aligned}-k_0\cos\odot\cos\varepsilon=C;&\quad -k_0\sin\odot=D;\\ \cos\alpha\sec\delta=c;&\quad \sin\alpha\sec\delta=d;\\ \tan\varepsilon\cos\delta-\sin\alpha\sin\delta=c';&\quad \cos\alpha\sin\delta=d'。\end{aligned}\right\}\qquad(96)$$

C 及 D 與 $\odot$ 有關，但與恆星的位置 (α,δ) 無關；c, d, c', d' 僅與恆星的位置有關，但與太陽的位置無關。於是

$$\left.\begin{aligned}\alpha'-\alpha&=Cc+Dd\ (\text{未加上含 } e \text{ 的各項}),\\ \delta'-\delta&=Cc'+Dd'\ (\text{未加上含 } e \text{ 的各項})。\end{aligned}\right\}\qquad(97)$$

從另一方面，若引入量 h 及 H，使得

$$C=h\sin H,\quad D=h\cos H,\quad i=C\tan\varepsilon,$$

那末沒有帶 e 的項的 $(\alpha'-\alpha)$ 及 $(\delta'-\delta)$ 就成爲：

$$\left.\begin{aligned}\alpha'-\alpha&=h\sin H\cos\alpha\sec\delta+h\cos H\sin\alpha\sec\delta=\\ &=h\sin(H+\alpha)\sec\delta,\\ \delta'-\delta&=h\sin H(\tan\varepsilon\cos\delta-\sin\alpha\sin\delta)+\\ &\quad+h\cos H\cos\alpha\sin\delta=h\cos(H+\alpha)\sin\delta+i\cos\delta。\end{aligned}\right\}\qquad(98)$$

需要注意，在我們的推導中我們應用了只準確到第一次冪的窄球面三角形的解(§13)，省略了二次冪及小量 $(\alpha'-\alpha)$ 和 $(\delta'-\delta)$ 的乘積；對於靠近極的恆星，這些常用的公式是不夠準確的，因爲其中的誤差達到

了角度秒的百分之幾。

應用第二次近似的公式，卽得以弧度爲單位的式子（參考§13，公式23及24）

$$\left.\begin{aligned}(\alpha'-\alpha)\cos\delta&=(Cc+Dd)\cos\delta+(Cc+Dd)(Cc'+Dd')\sin\delta,\\ \delta'-\delta&=Cc'+Dd'-\frac{1}{4}(Cc+Dd)^2\sin 2\delta。\end{aligned}\right\}\quad(99)$$

假若 k_0 以及 C 和 D 都以角度秒表示，那末

$$(\alpha'-\alpha)''\cos\delta=15(\alpha'-\alpha)^s\cos\delta=$$

$$=[Cc+Dd]''\cos\delta+\frac{(Cc+Dd)''(Cc'+Dd')''}{206265''}\sin\delta,$$

$$(\delta'-\delta)''=(Cc'+Dd')''-\frac{1}{4}\frac{[(Cc+Dd)'']^2}{206265}\sin 2\delta。$$

§79. 恆星視位置繞眞位置而畫出的曲線　已推出的公式常用以計算光行差；但是，當地球按克普勒定律而運動時，恆星的被光行差改變了的位置，對於恆星的日心位置，畫出什麼樣的曲線，由這些公式並不能看得完全清楚。在這裏我們用比這些公式更好更清楚的幾何方法來研究這個問題。在§23的末了已經解釋過，地球的克普勒運動的速端曲線是一個圓，其半徑等於橢圓的長徑，而圓心則位於垂直於長軸的直線上，距焦點爲 ae，速度向量的原點在焦點上。在速端曲線中由向量原點引至圓上任意點的向量，其方向與地球在相應點的速度的方向相同，大小則與此速度的大小成正比。

在圖50中設 a 表示地球的速端曲線（參考§23之末）；F 爲速度向量的原點，O 爲速端曲線的圓的中心，$F\Upsilon$ 爲至春分點的方向；從§23的圖13可以看出，角 ΥFO，卽點 O 的黃經，等於 $90°+$ 地球軌道的近日點的黃經，也就是 $90°+\varpi$。設有一個恆星 S（圖50，乙），其日心位置爲黃道的北極。根據光行差定律其被光行差所改變了的位置 S' 由 S 沿速度方向

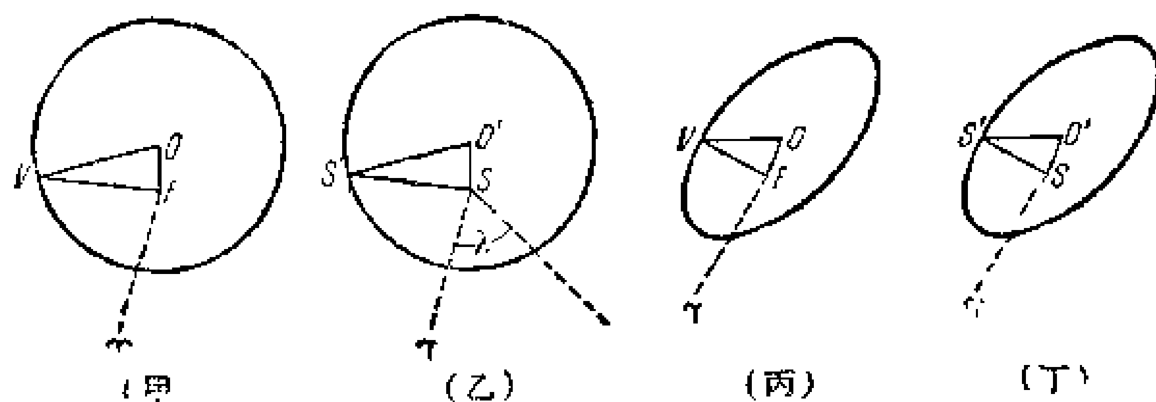


圖 50.

FV 位移，此位移與速度的大小成正比；由此直接可知，S' 畫出一個半徑爲 k_0 的圓，但中心不在點 S，而沿黃經爲 $90°+w$ 的方向自 S 位移了 ek_0 的距離。應當了解到，在這種情形下任意的速度向量 FV（參考圖 50，甲），因而也就是說，任意的光行差位移 SS' 都可以當作兩個向量之和來研究：一個是 SO'，大小及方向都是常數，另一個爲 $O'S'$ 與 OV 平行，大小爲常數 k_0，方向則隨地球繞日的運動而改變着。

現在設想任一恆星 S，其黃經爲 λ，黃緯爲 β，把地球的速端曲線投影在與由太陽至此恆星的方向垂直的平面上；顯然（圖 50，丙），速端曲線的投影將爲橢圓，其長徑對於所有的恆星都是同樣的，等於 $2a$，且垂直於恆星的黃經圈，短徑則等於 $2a\sin\beta$；向量的原點投影在橢圓内的某一處，一般地說來，不在長軸上也不在短軸上。我們要注意，總速度的垂直於投影平面的分速度，也就是沿着由太陽至恆星的方向的分速度，並不能產生光行差位移，因此（圖 50，丁）光行差位移 SS' 在每一個時刻都平行於圖 50，丙中橢圓内的向量 FV，且等於向量 FV 的長乘以 $\frac{k_0}{a}$。所以，S' 將繞 S 而畫出一個準確的橢圓，長徑對於所有的恆星都是 $2k_0$，短徑等於 $2k_0\sin\beta$，但一般說來 S 不在這個橢圓的長軸上也不在短軸上。又像位於黃極上的恆星一樣，對於任一恆星也可以將光行差位移向量 SS' 當作兩個向量之和來研究：一個是大小及方向都不變的 SO'，其中 O' 爲橢圓的中心，另一個是隨着時間而變化的 $O'S'$。常數向量 SO' 的影響在我們的公式中近似地由包含着地球軌道偏心率 e 的各項表示出來。

§80. 行星的光行差　光行差改變所有天體的真坐標：太陽的，月球的，行星的，彗星的，而不僅是恆星的；然而，對於一天之内在天球上就有看得出來的運動的天體，計算光行差的問題就因下述理由而變得有些複雜了。

在圖 51 中設 T 及 P 表示在時刻 t 時地球和行星的位置；光於時刻 t 離開行星 P 而於時刻 t_1 到達地球，在由 t 到 t_1 的時間裏，地球位移到了點 T_1，而行星在時刻 t_1 則位於 P_1。所以，在時刻 t 由地球至行星的真方向是 TP。假若 T_1P' 爲在時刻 t_1 所觀測到的光線的視方向，那末角 PT_1P' 就是光行差位移且

$$\sin PT_1P'=\frac{V}{c}\sin P'T_1A=$$

$$=\frac{V(t_1-t)}{c(t_1-t)}\sin P'T_1A=\frac{TT_1}{PT_1}\sin P'T_1A。$$

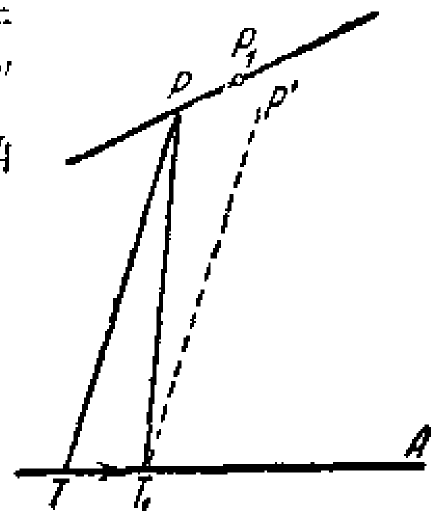


圖　51.

另一方面由三角形 PTT_1 得：

$$\sin TPT_1 = \frac{TT_1}{PT_1} \sin PTT_1 。$$

因此
$$\frac{\sin PT_1P'}{\sin P'T_1A} = \frac{\sin TPT_1}{\sin PTT_1} 。$$

但一個比率的角和 $PT_1P' + P'T_1A$ 等於另一個比率的角和 $TPT_1 + PTT_1$，原因是每一個和都等於角 PT_1A。因此角 PT_1P' 等於角 TPT_1，也就是說直線 T_1P' 平行於直線 TP。

對於行星運動的理論研究必須知道由地球至行星的直線的實際方向，由上述可以看出，爲要得到它可以從兩方面進行：或者(1)不加改正地保留天體的視位置於 T_1P' 的方向，它將表示由 T 至 P 的直線的實際方向，就是說不在觀測的時刻 t_1，而在時刻 t，t 較 t_1 早 $(t_1-t)=\frac{T_1P}{c}$ 之值，或者(2)根據普通的公式消去光行差對視位置的影響，而得到方向 T_1P，然而這將不是同一個時刻地球與行星連線的方向，而是地球在時刻 t_1 的位置與行星在時刻 t 的位置的連線的方向，t 又比 t_1 早 $(t_1-t)=\frac{T_1P}{c}$ 之值。兩者都適合於理論研究，然而，我們將看到，在兩種情形下都需要能夠算出 (t_1-t) 之值，這就是所謂的光行差時間。

爲了要計算它，需要知道行星與地球的距離 T_1P。初次計算行星的軌道時這是未知的，因此光行差乾脆就省略掉了；然而軌道的準確計算通常不只用一個方法，因此在第二次較準確的計算時可以夠準確地根據第一次的近似軌道而算出距離 T_1P，這時候光行差的影響必須夠準確地考慮到。計算軌道時是用地球與太陽的平均距離 a 來作距離的單位，因此光行差時間等於 $\frac{TP}{a}\cdot\frac{a}{c}$；係數 $\frac{a}{c}$ 等於 $\frac{149.5\times10^6}{3\times10^5}=498$ 秒。

這些推理是在這樣的意義下應用於恆星的：由恆星的觀測到的視坐標消去周年光行差以後，我們就得到假設地球不繞日運動時的恆星的位置，或者，換句話說（不管恆星的周年視差），我們就得到觀測時的日心位置，雖然光是在這個時刻之前許多年離開恆星的。

太陽在空間中的運動引起了長期光行差的現象，但因爲我們只近似地知道太陽速度的方向(向天鵝座的北部)及大小(250—300公里/秒)，那末要準確地計算這種光行差是不可能的，且因爲在幾百和幾千年的時期裏(但非幾百萬年)這個方向和速度似乎是不變的，所以不需要考慮這種不變的光行差；它並不妨礙恆星自行的測定。這種說法也適用於太陽對於最近的恆星的運動，這種運動的速度約爲20公里/秒，運動的方向是向武仙座。

§81. **周年光行差係數的測定** 測定這個係數的方法有三種。

1. 可由某些其他的量的數值來計算它。實際上，正如我們已見到的，$k_0=\frac{V_0}{c}=\frac{2\pi a}{cP\sqrt{1-e^2}}$；但是 $a=\frac{R}{\sin p_0}=\frac{R\cdot 206265''}{p_0''}$，其中 R 爲地球的赤道半徑，p_0'' 爲以角度秒表示的太陽的赤道視差。

因此 $$k_0=\frac{2\pi R\times 206265^2}{cp_0P\sqrt{1-e^2}}\ \text{以角秒表示。}$$

根據最近的研究 $R=6378.2$ 公里，可能的誤差不超過百分之0.002；$c=299800$ 公里/秒，可能的誤差約爲百分之0.011；P(恆星年的秒數)$=31558149.54$ 秒；$e=0.01673$；這些量是知道得夠準確的，因此下式的可能的誤差不大於百分之0.013(± 0.02)

$$k_0p_0=180.24$$

p_0 以角秒表示。

假若 p_0 知道得夠準確，卽可由這個方程式求出 k_0；但是我們在§68中已看到，在現代所取的值 $p_0=8''.80$ 中，誤差達到 $0''.010$ 是可能的，因而這樣求出的 k_0 的誤差可能到 $\pm\frac{20.5}{8.8}\times 0''.01=\pm 0''.023$。這種準確度是不夠的，因此式子 $k_0p_0=180.24$ 在現代不是用於計算 k_0 或 p_0，而是用以檢查 k_0 和 p_0 的數值是否一致，k_0 及 p_0 則用互相獨立的方法求出。

2. 第二個方法的根據是：至少在一年的時間裏觀測所選定的恆星

的視坐標，並從這些觀測的結果中直接測定 k_0。因此，這和詹姆斯·布拉得雷 (James Bradley) 在十八世紀的二十年代用以發現光行差的方法完全類似。他觀測了天龍座 γ 星上中天時的天頂距，他本來是要求它的視差的，但發現了天頂距的周期性的周年變化，這種變化的振幅是 $\pm 20''.25$，與視差位移的規律不同。布拉得雷把它解釋爲地球的繞日運動和光線傳播速度的有限性的結果。公式(94)和(95)可以寫作：

$$\alpha' = \alpha + k_0 A, \quad \delta' = \delta + k_0 D,$$

其中 A 及 D 爲恆星及太陽坐標的函數。

假若恆星的日心坐標 α 及 δ 不隨時間而變化，那末觀測的坐標 α' 及 δ' 僅由以一年爲周期的光行差的影響而變化(關於視差請參閱下面)，因此，從一年內的觀測裏可以由幾個這樣的方程式（分別根據 α' 和 δ'）來確定 α 和 k_0，以及 δ 和 k_0。然而 α 和 δ 因歲差，章動及恆星自行的影響而變化着，所以只當能夠把這三種原因的影響都計算在內時，才能夠定出 k_0 來。需要根據長期的觀測才可能這樣做，然後也才可能定出 k_0 來。

此外，爲要獲得大的準確度，似乎應當在方程式中引入一些與周期也是一年的周年視差 π 有關的項，使得最後的方程式成爲

$$\alpha' = \alpha + k_0 A + \pi P, \quad \delta' = \delta + k_0 D + \pi Q,$$

其中 P 及 Q 代表視差式子中的係數。然而，因爲可以預期到的視差值只是很小的(數量級爲 $0''.1$ 或更小)，所以它對於恆星的視位置所畫出的圖形的影響是完全量不出來的。因此把確定視差與確定 k_0 聯系起來是沒有意義的。視差是用別的方法測量出來的，與光行差無關。

顯然，對於由測量赤緯而確定 k_0 來說，最方便的辦法是選取赤緯被光行差改變得特別厲害的那些恆星，但是光行差使沿黃緯圈的垂線的每一個恆星位移得同樣厲害；所以，應當選擇赤緯圈與黃緯圈垂直的那些恆星，也就是在曲線 $P\,90°\,\Pi$ 上的恆星(參考§10)。對於根據赤經的變化而確定 k_0 來說，最方便的辦法是選取靠近赤道極且赤經近於 6

小時和 18 小時的恆星。在第十二章裏我們還要回到這個問題來。

在十九世紀內反覆地用了這種方法來確定係數 k_0。由此所得的值都在 $20''.45$ 與 $20''.52$ 之間；這樣的一致性並不使天文學家滿意；其間的差別可能由於，還存在着某種或具一年的或具一日的周期的因素在影響着觀測的坐標 α 和 δ。

1896 年在巴黎召開了一次國際天文學會議，目的在於確立為所有計算用的相同的天文常數，會上採取了 $k_0=20''.47$ 這個值，因為它與在當時被認為太陽視差和光速的最佳值相符合。現在，在處理了 1930—1931 年間愛神星的觀測以後，得出值 $p_0=8''.790\pm0.001$(參考§68)，相應的值 k_0 等於 $\frac{180.24}{8.790}=20''.505$。在所有基本的天文常數中光行差常數的準確度最小。

3. 可以由恆星的視線速度來確定 k_0。最簡單地說來，這種方法是這樣的：設恆星 S 位於黃道上且以 x 公里/秒的速度離開太陽；在一年中總有一天，地球對於太陽的速度 V 恰好向着這個恆星，因此，恆星離開地球的觀測速度為 $v_r=x-V$；半年以後地球的速度朝着與恆星相反的方向，因此觀測的速度為 $v_r'=x+V$，根據都普勒·菲索原理由觀測定出了視線速度 v_r 和 v_r' 以後，可以算出 x 和 V，由 V 就可以算出 k_0 了。

更準確的推理和公式是這樣的。速度向量 $V=V_0[1-e\cos(\odot-w)]$ 的黃經，也就是奔赴點 A 的黃經是 $\odot-(90^\circ+\eta)$；黃緯為 0°；被觀測的恆星 S 的黃經和黃緯設為 λ 和 β。V 在由觀測者到恆星的方向上的投影等於

$$\begin{aligned}V_r=V\cos AS&=V\cos\beta\cos(\odot-90^\circ-\eta-\lambda)=\\&=V_0[1-e\cos(\odot-w)]\cos\beta\sin(\odot-\eta-\lambda)=\\&=V_0\cos\beta[1-e\cos(\odot-w)][\sin(\odot-\lambda)\cos\eta-\\&\qquad-\sin\eta\cos(\odot-\lambda)]。\end{aligned}$$

但 $\eta=-e\sin(\odot-w)$ 為第一級小量；若局限於第一級的小量，就可以

使 $\cos\eta=1$ 且忽略帶有 $e\sin\eta$ 的項。於是

$$V_r = V_0\cos\beta[\sin(\odot-\lambda)+e\sin(\odot-w)\cos(\odot-\lambda)-$$
$$-e\cos(\odot-w)\sin(\odot-\lambda)]=$$
$$=V_0\cos\beta[\sin(\odot-\lambda)+e\sin(\lambda-w)]。$$

地球上的觀測者與恆星的距離 r 的所觀測到的增加率 $\frac{dr}{dt}$ 由下列幾個不固定的速度合成：(1)剛剛推出來的帶有負號的地球中心速度；(2)觀測者對於地球中心的速度（它小於 $\frac{1}{2}$ 公里/秒，可以準確地計算出來）；(3)由地球中心運動的擺動而生的速度，這種擺動是因月球和行星的吸引而產生的；(4)太陽中心對於太陽系質量中心的運動速度以及(5)恆星對於這個質量中心的速度，以字母 x 表示。(3)及(4)的速度是小的（參考§76），可以把它們忽略，假若不願意忽略，也可以準確地計及它們。速度 x 可以當作常數，只要觀測沒有顯示出變化性，也就是說只要恆星不是分光雙星。

這樣一來，若以 v_r 表示觀測的速度，以符號 $\varDelta v_r$ 表示(2)，(3)及(4)中速度之和，那末我們將得到方程式：

$$v_r-\varDelta v_r=x-V_r=x-V_0\cos\beta[\sin(\odot-\lambda)+e\sin(\lambda-w)]$$

式中的 x 和 V_0 是未知的。

由在一年中不同的日子裏特別是在 $(\odot-\lambda)$ 靠近 $+90°$ 和 $-90°$ 的月份裏得到的幾個 v_r 值，可以算出 x 以及對我們尤其需要的 V_0。

此外，在光譜照片上可以用毫米爲單位測量恆星譜線對於地上光源的相應譜線而言的位移。假設波長爲 λ 的譜線以毫米爲單位的位移是 $\varDelta l$；在光譜的這一部份的色散度 $\frac{d\lambda}{dl}$ 已知；則波長的視變化爲 $\varDelta\lambda=$ $=\varDelta l\frac{d\lambda}{dl}$ 而 $v_r=c\frac{\varDelta\lambda}{\lambda}$，其中 c 爲光速。因此

$$\frac{v_r}{c}=\frac{\varDelta\lambda}{\lambda}=\frac{\varDelta v_r}{c}+\frac{x}{c}-\frac{V_0}{c}\cos\beta[\sin(\odot-\lambda)+e\sin(\lambda-w)],$$

因此由方程式可直接求出以弧度爲單位的 $\frac{V_0}{c}=k_0$。1906—1908 年及

1919 年在好望角天文台曾經用這個方法最細心地確定了 k_0，結果得 $k_0=20''.475\pm0''.010$。可以看出，k_0 的這個值與 1896 年巴黎會議所採取的值符合得很好。

§82. 光行差較差　可以與大氣折射較差(§60)一樣地用完全相同的方法來研究。設想，在圖 40 中在點 Z(天頂的投影)的位置上的是點 A—地球周年運動的奔赴點的投影。設 u, v 爲恆星 S 的被光行差畸變了的坐標，u', v' 爲恆星 S' 的眞坐標。如在 §60 中一樣地，我們有下面一系列的公式：

$$\cos ACS=\frac{vV+1}{\sqrt{1+u^2+v^2}\sqrt{1+V^2}};$$

$$\sin ACS=\frac{\sqrt{u^2(1+V^2)+(v-V)^2}}{\sqrt{1+u^2+v^2}\sqrt{1+V^2}}=\frac{D}{P},$$

$$\frac{u'-u}{u}=\frac{v-v'}{V-v}=t;\ u'=u(1+t);\ v'=v-t(V-v);\ v'-V=(1+t)(v-V),$$

$$\cos ACS'=\frac{[V+(1+t)(v-V)]V+1}{\sqrt{1+u^2(1+t)^2+[V+(1+t)(v-V)]^2}\times\sqrt{1+V^2}}=$$

$$=\frac{1+(1+t)vV-V^2t}{Q},$$

$$\sin ACS'=\frac{\sqrt{u^2(1+t)^2(1+V^2)+(1+t)^2(v-V)^2}}{Q}=\frac{(1+t)D}{Q}。$$

因此

$$\sin SCS'=\sin(ACS'-ACS)=$$

$$=\frac{(1+t)D}{Q}\times\frac{vV+1}{P}-\frac{D}{P}\times\frac{1+(1+t)vV-V^2t}{Q}=$$

$$=\frac{D}{PQ}[1+t+vV+tvV-1-vV-tvV+tV^2]=\frac{D}{PQ}t(1+V^2)。$$

但是根據光行差位移的定律 $\sin SCS'=k\sin SCA$，或者，誤差小於 $0''.001$ (參考 §6 第 4 段)，

$$\sin SCS'=k\sin S'CA=k\frac{(1+t)D}{Q}。$$

因而

$$\frac{D}{PQ}t(1+V^2)=\frac{k(1+t)D}{Q}。$$

由此得到準確到 k 的一次冪的下列式子

$$t=\frac{kP}{1+V^2-kP}=\frac{kP}{1+V^2}=k\sqrt{\frac{1+u^2+v^2}{1+V^2}},$$

$$u'-u=ut=uk\sqrt{\frac{1+u^2+v^2}{1+V^2}},$$

$$v'-v=-t(V-v)=k(v-V)\sqrt{\frac{1+u^2+v^2}{1+V^2}}\text{。}$$

但是 $V=\tan OCA$ 等於奔赴點與底片(或測微器的視場)中心之間的天球上的弧的正切。

因此
$$\frac{1}{\sqrt{1+V^2}}=\cos OCA,\quad \frac{V}{\sqrt{1+V^2}}=\sin OCA,$$

$$u'-u=uk\cos OCA+\frac{1}{2}u(u^2+v^2)\,k\cos OCA\;,$$

$$v'-v=vk\cos OCA+\frac{1}{2}v(u^2+v^2)k\cos OCA-k\sin OCA\left(1+\frac{u^2+v^2}{2}\right)\text{。}$$

這些式子中的第二項是對 u 及 v 而言的第三級小量；因此，若局限於第二級小量，得：

$$u'-u=uk\cos OCA,$$

$$v'-v=vk\cos OCA-\left[1+\frac{1}{2}(u^2+v^2)\right]k\sin OCA\text{。}$$

這就是光行差對於恆星 S 的坐標 u, v 的影響的完整式子。對於在點 O 的中心恆星它們等於：$u'-u=0$ 及 $v'-v=-k\sin OCA$，因此光行差較差可表如：

$$\left.\begin{aligned}u'-u&=uk\cos OCA,\\ v'-v&=vk\cos OCA-\frac{1}{2}(u^2+v^2)k\sin OCA\text{。}\end{aligned}\right\}\qquad(100)$$

從這些公式可以看出，若局限於對 u 及 v 而言的第一級小量的各項，就可以說，光行差使 u 及 v 兩個坐標都減小了，使任何其他的坐標以及相鄰近的恆星之間的距離也減小。比率都同樣是 $1:(1+k\cos OCA)$；它祇不影響恆星的相對位置的圖形，只減小這一個圖形。由恆星到恆星的各個方向之間的角是不變的，而所有恆星的位置角都像中心恆星的位置角一樣地改變着。

假若引入另一個坐標系，例如，使 y 軸指向極 P，使 x 軸沿赤經增加的方向，如在大氣折射較差理論中一樣，那末，以字母 θ 表示球上弧 OP 與弧 OA 之間的角之後，我們將得到類似公式(71)的公式，只是以角 θ 代替了角 q；角 θ 也像角 q 一樣地由 OP 算起。這樣一來由方程式(100)就得到：

$$\Delta u=u'-u=\Delta x\cos\theta-\Delta y\sin\theta=k(x\cos\theta-y\sin\theta)\cos OCA,$$
$$\Delta v=v'-v=\Delta x\sin\theta+\Delta y\cos\theta=$$
$$=k(x\sin\theta+y\cos\theta)\cos OCA-\frac{1}{2}k(x^2+y^2)\sin OCA\text{。}$$

由此推出：

$$\left.\begin{aligned}x_{\text{視}}-x_{\text{測}}=x'-x=\Delta x&=kx\cos OCA-\\ &-\frac{1}{2}k(x^2+y^2)\sin OCA\sin\theta,\\ y_{\text{視}}-y_{\text{測}}=y'-y=\Delta y&=ky\cos OCA-\\ &-\frac{1}{2}k(x^2+y^2)\sin OCA\cos\theta\text{。}\end{aligned}\right\}\qquad(101)$$

此外，如同在大氣折射的情形裏一樣，需要考慮到光學中心的位移對於量 $k\sin OCA$ 的影響；因此必須在公式(101)上加上：

在 Δx 上　　$k\sin OCA\sin\theta\, x^2+k\sin OCA\cos\theta\, xy$，

在 Δy 上　　$k\sin OCA\sin\theta\, xy+k\sin OCA\cos\theta\, y^2$。

這樣一來就得到

$$\left.\begin{aligned} x'-x&=k\cos OCA\cdot x+\frac{1}{2}k\sin OCA\sin\theta\cdot(x^2-y^2)+\\ &\quad+k\sin OCA\cos\theta\cdot xy,\\ y'-y&=k\cos OCA\cdot y-\frac{1}{2}k\sin OCA\cos\theta\cdot(x^2-y^2)+\\ &\quad+k\sin OCA\sin\theta\cdot xy。\end{aligned}\right\}\tag{102}$$

我們注意到，因子 $k\sin OCA\sin\theta$ 和 $k\sin OCA\sin\theta$ 不是別的，而正就是在§78 中推出的以公式(94)—(98)表出的光行差的影響 $(\alpha'-\alpha)\cos\delta$ 和 $\delta'-\delta$。

§83. 周日光行差　由於地球繞軸的自轉在地心緯度 φ' 處的觀測者每一時刻都有一個向東點的速度，這速度等於 $V=2\pi R\cos\varphi'/86164$ 公里/秒，其中 R 為以公里為單位的由地心至觀測者的距離，而 86164 為一恆星日中的平太陽時秒數，對於所有的緯度取 $R=6368$ 公里是完全足夠的，於是 $V=0.464\cos\varphi'$ 公里/秒。由於這個速度每一個天體 S 都根據光行差定律沿大圓 SE(其中 E 為東點)而位移了弧 $SS'=206265''\dfrac{V}{c}\sin SE$。若將 V 的式子代入，則得：$SS'=206265''\dfrac{0.464}{3\times10^5}\sin SE\times$ $\times\cos\varphi'=0''.319\cos\varphi'\sin SE$；$0''.319$ 為周日光行差常數；在這一節中我們將以字母 k' 來表示它。因為它小，所以可用 $\cos\varphi$ 代替 $\cos\varphi'$。

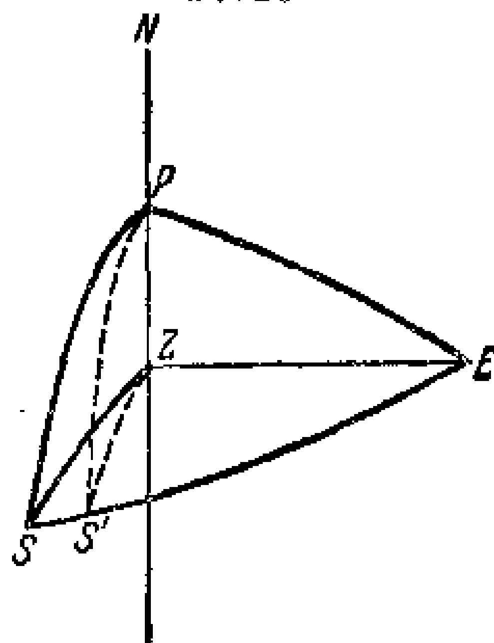


圖 52.

我們應當把周日光行差的影響引入各種不同的球面坐標裏去。為此需要應用關於窄球面三角形的理論(§13)或者將位移 SS' 投影於天球的某個圈上。

(1)對於 z 及 A 的影響　由窄三角形 SZS' 得：

$$z-z'=SS'\cos ZSS'=k'\sin SE\cos ZSS'\text{。}$$

但由三角形 ZSE 得：

$$\sin SE\cos ZSE=\cos ZE\sin z-\sin ZE\cos z\cos SZE=$$
$$=0-\cos z\cos(90^\circ+A)=\cos z\sin A\text{。}$$

因此 $z-z'=k'\cos z\sin A$ 及 $z'=z-k'\cos z\sin A$ 。

對於方位角由三角形 SZS' 得：

$$(A-A')\sin z=SS'\sin ZSS'=k'\sin SE\sin ZSE=$$
$$=k'\sin(90^\circ+A)=k'\cos A,$$

由此 $A'=A-k'\cos A\csc z$ 。

（2）對於 δ, t, α 的影響　由三角形 PSS' 得：

$$PS-PS'=SS'\cos PSS'=k'\sin SE\cos PSE\text{。}$$

但由三角形 PSE 得：

$$\sin SE\cos PSE=\cos PE\sin PS-\sin PE\cos PS\cos SPE\text{。}$$

因此 $PS-PS'=k'[0-\sin\delta\cos(t+90^\circ)]=k'\sin\delta\sin t,$

但 $PS-PS'=\delta'-\delta,$

因而 $\delta'=\delta+k'\sin\delta\sin t$ 。

對於 t 則得：

$$(t-t')\sin PS=SS'\sin PSE$$

或 $(t-t')\cos\delta=k'\sin SE\sin PSE=$

$$=k'\sin PE\sin(t+90^\circ)=k'\cos t,$$

因而 $t'=t-k'\cos t\sec\delta$ 。

顯然、按絕對値而言 α 的變化等於 t 的變化，但記號則相反、所以

$$\alpha'-\alpha=t-t'=k'\cos t\sec\delta\text{。}$$

第十章　歲差和章動

§84. 基本概念；名詞；問題的建立　歲差的現象是這樣的，春分點並不停留在恆星間的一個地方，而是在黃道上迎向太陽移動着。顯然，由於這個原因太陽每年通過春分點的時間總比太陽回到恆星間的同一地方的時間要早些，也就是說回歸年比恆星年短。這就是歲差一詞的來源。

歲差的現象是紀元前二世紀時依巴谷所發現的。他用當時的實用天文學的儀器，卽所謂的渾天儀，去測定某些恆星的黃經和黃緯，並與在他之前 150 年希臘天文學家提摩哈里斯和阿里斯提耳所得到的同一些恆星的黃經相比較，發現了所有的恆星的黃經在 150 年中都增加了約 $1\frac{1^\circ}{2}$。依巴谷認爲黃經的這種增加，是因爲春分點本身——黃經計算的原點，在這個時期中沿着與太陽運動相反的方向移動了 $1\frac{1^\circ}{2}$。以力學爲基礎的歲差的理論解釋是牛頓所提出的。

1747 年布拉得雷發現了赤道極和春分點的振動，卽所謂的章動。歲差和章動的最初的完整的動力學理論是達朗柏爾(d'Alembert)提出的（1749 年）。白塞耳在十九世紀初葉首先確定了歲差和章動的係數的準確數值。十九世紀中葉普耳科夫的天文家斯特魯維和彼得爾斯(Петерс)的研究獲得了新的數值。現在所應用的數值是紐康(Newcomb)在十九世紀末葉所求出的。

這個現象的要點在於，黃道極和赤道極在天球上恆星之間並非停留不動，而是在緩慢地移動着：黃道極的移動約是赤道極移動的四十分之一；因此，黃道、赤道和春分點在天球上的位置在改變着，恆星的坐標($\alpha, \delta, \lambda, \beta$)也在慢慢地改變着，正好比在平面上當坐標軸線的位置在變化時各點的坐標也就改變一樣。因此，當我們在一年或幾年的不同的日子裏不只一次地以觀測來確定任一個恆星的 α 和 δ 時，由於坐標

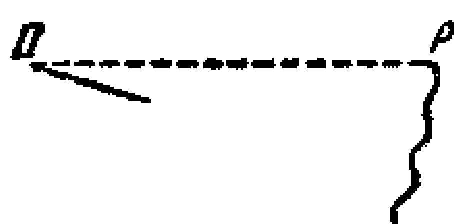


圖 53.

軸的這種運動所得的値就彼此不同了,爲了比較它們並且由觀測求出任何時候的坐標以及恆星的自行,就必須從觀測到的坐標中將坐標系運動的影響消除。另一方面,要根據由星表中取出的對應於一定時刻的黃道和赤道位置的恆星的α和δ,爲天文曆書而預算這個恆星在另一時刻的α和δ時,必須計算α和δ的變化,這種變化由黃道和赤道位置的改變以及恆星的自行而得到。

黃道和赤道的北極的運動近似地以下述方式進行。設在圖53中所表示的是由外面所看到的天球的一部份。Π爲黃極,P爲赤極;春分點♈永遠與Π和P相距90°,同時它的位置是這樣的,設想有一個觀測者在天球上的點Π,他的臉向着點P,那末♈就在他的右邊。黃極Π在從幾百年前到幾百年後的時期裏幾乎沿大圓弧以每年約$0''.47$的速度向着與弧ΠP(參考圖53)成約7°之角的方向移動。赤極P則繞黃極沿波形曲線順時針方向而運動。這種運動由下面的運動合成:(1)某個點,即所謂的平均赤極,在每一時刻都向着與一個大圓弧垂直的方向而運動,這個大圓弧連接此時刻的黃極位置以及此時刻的平均赤極位置;運動的方向是向着春分點所在的那一邊;(2)眞極繞平均極而運動,畫出了橢圓形的波狀圖形,平均極位於圖形的中心;圖形的長軸約爲$18''$,方向沿着弧ΠP,短軸之長約$13''$;若由外面看天球,這個運動是順時針方向的。

對應於平均極的赤道稱爲在給定時刻的平均赤道,與黃極和平均赤極相對應的春分點稱爲這個時刻的平均春分點。由所說的可見,在每一個時刻平均極的運動是沿着大圓弧的方向且準確地向着平均春分點的。

顯然,由於平均極的這種運動,春分點不斷地在黃道上沿着與太陽的運動相反的方向運動着;因此太陽連接兩次經過春分點的時間間隔(回歸年)比太陽連接兩次回到恆星間的同一位置的時間間隔(恆星年)

爲短。平均極沿着大圓弧運動的速度約爲每年 $20''$，又因爲距離 ΠP 約等於 $23\frac{1}{2}^\circ$，所以弧 ΠP 每年繞點 Π 旋轉 $20''/\sin 23\frac{1}{2}^\circ$，即約 $50''$；顯然，平均春分點在一年中也迎向太陽後退同樣的角度。假若黃極不運動，那末距離 ΠP 也不改變，極 P 就會在約 26,000 年中以 Π 爲圓心而畫出一個圓；但由於極 Π 運動的緣故極 P 畫出的是螺旋線（參考§86）。

黃道與平均赤道在給定時刻的交角稱爲此時刻黃道的平均交角。

對於赤道和春分點在給定時刻的平均位置而言的恆星的坐標 α 和 δ，稱爲恆星對於這個時刻的平均坐標。

赤道的眞極，如上面說過的，畫出了橢圓形的波狀圖形，平均極位於其中心。這個現象稱爲章動。

與在給定的時刻的黃極和眞赤極的位置相對應的赤道和春分點，稱爲在這個時刻的眞赤道和眞春分點。黃道與眞赤道之間的角稱爲在這個時刻的眞黃赤交角。在給定的時刻與黃極和眞赤極相對應的恆星的坐標稱爲恆星的眞坐標。

顯然，極 P 向着或離開極 Π 的章動引起了 Π 與 P 間的距離的周期變化，因而，也引起了赤道面與黃道面的交角的周期變化：這就是所謂的交角 ε 的章動。極 P 在垂直的方向，也就是沿着弧 $P\Upsilon$ 的方向的章動引起了眞春分點在黃道上對於平均春分點的周期擺動。有時和平均極的進動同方向，有時在相反的方向。

黃道面及其極的運動是由攝動而生的，這種攝動是由行星的吸引對於地月系重心的運動的影響而產生的，由§24 裏黃道概念的定義中這一點就可以清楚地看出來了。這種運動可以根據天體力學的理論而算出。赤極的運動是由月球和太陽對於橢圓球形的地球的作用而生的；它的理論也在天體力學中研究，但是，爲了使學生對於極的運動公式的推導有一大略理解，我們將在第十三章中給出它們的初級的，近似的推導，然而不是詳細的準確的理論。

假若已給極 Π 和 P 與恆星 S 在時刻 t 於天球上的位置，則可得出

恆星的坐標 α 和 δ; $PS=90^\circ-\delta$, $\Pi PS=90^\circ+\alpha$。假若已知極 Π 和 P 到時間 t_1 時位移了多少而至新位置 Π_1 和 P_1，那末即可根據在初始時刻 t 恆星的 α 和 δ 並根據極的位移而計算恆星 S 的新坐標 α_1 和 δ_1。但是用普遍方式解這個問題將得到非常複雜的三角公式，若需要把許多坐標 α 和 δ 轉換為坐標 α_1 和 δ_1，實際上常得這樣做，這些式子是不方便的。因此要應用另一種方法。第一步，把歲差影響的計算與章動影響的計算分開來。第二步，或者根據準確的公式來計算歲差，但這僅限於時刻 t 與 t_1 之差為幾十或幾百年的情形，而且所討論的是拱極星，或者根據近似的公式來計算歲差，當 t_1-t 不超過 30 至 50 年(視赤緯而定)，而恆星又不靠近極時，根據近似公式來計算是足夠的。我們首先用後一個方法來討論，在 §91 中則用第一法；章動則在 §92 中討論。

歲　差

我們必須得到表示出任何時刻黃道和平均赤道的極以及春分點的運動的速度及方向的公式然後再得出表示在同一時刻給定的恆星的坐標 α 和 δ 的對應的變化速度的公式；這樣我們將得到對於時間的導數 $\frac{d\alpha}{dt}$ 及 $\frac{d\delta}{dt}$。根據它們就可以從理論上求出任意時刻的 α 和 δ 來，然而由於這些公式的複雜性，嚴格的解是不能得到的。因此這個問題的解用級數表出，只要時間 t_1-t 不超過三十至五十年，這樣的解就並不是特別複雜而且是足夠準確的。

為了推出極 Π 及 P 和黃道面及赤道面的運動速度的公式，就必須把兩個極的運動完全弄清楚。

在所有這些速度的式子中時間的單位都用回歸年(有時也可以不用回歸年為時間單位)。

§85. 黃道和其極的運動　正如已經說過的，黃道的運動是由行星對於地月系重心繞日的運動的擾動作用而產生的。此時，當然，黃極也在天球上運動，為了清楚地想像黃道的運動，最好是由討論它的北極的

運動開始。設圖 54 中的平面爲 1850 年初的黃道面。設註以數字 0 的點爲此時刻它的極在這個平面上的投影；所以，這就是此時刻的黃道中心。以虛線表示向着 1850 年的夏至點 69 及春分點 ♈ 的方向。螺線表示在一定時期中黃極在這個平面上的投影的軌跡；數字 1, 2, …, 10 表示在 1850 年之後經過 10 000, 20 000, …, 100 000 年的黃極投影的位置；數字 −1, −2, …, −10 表示在 1850 年之前經過同樣的年代的位置。比例尺已在圖上表出；以同一比例尺表示時，赤極的投影位於圖上所示到夏至點的方向，而在 40 厘米以外的地方。圖 55 爲 1700—2100 年中以大的比例尺表出的黃極的運動(即圖 54 的一部份)；在圖上這是一條直線，但實際上它稍微向上凸起。圖 54 所依據的計算只是近似的，這些計算的目的在於求出黃道面的位置在幾萬年中變化了多少；在 1850 年之前或後幾百年中黃極以及黃道面的位置是知道得很準確的，

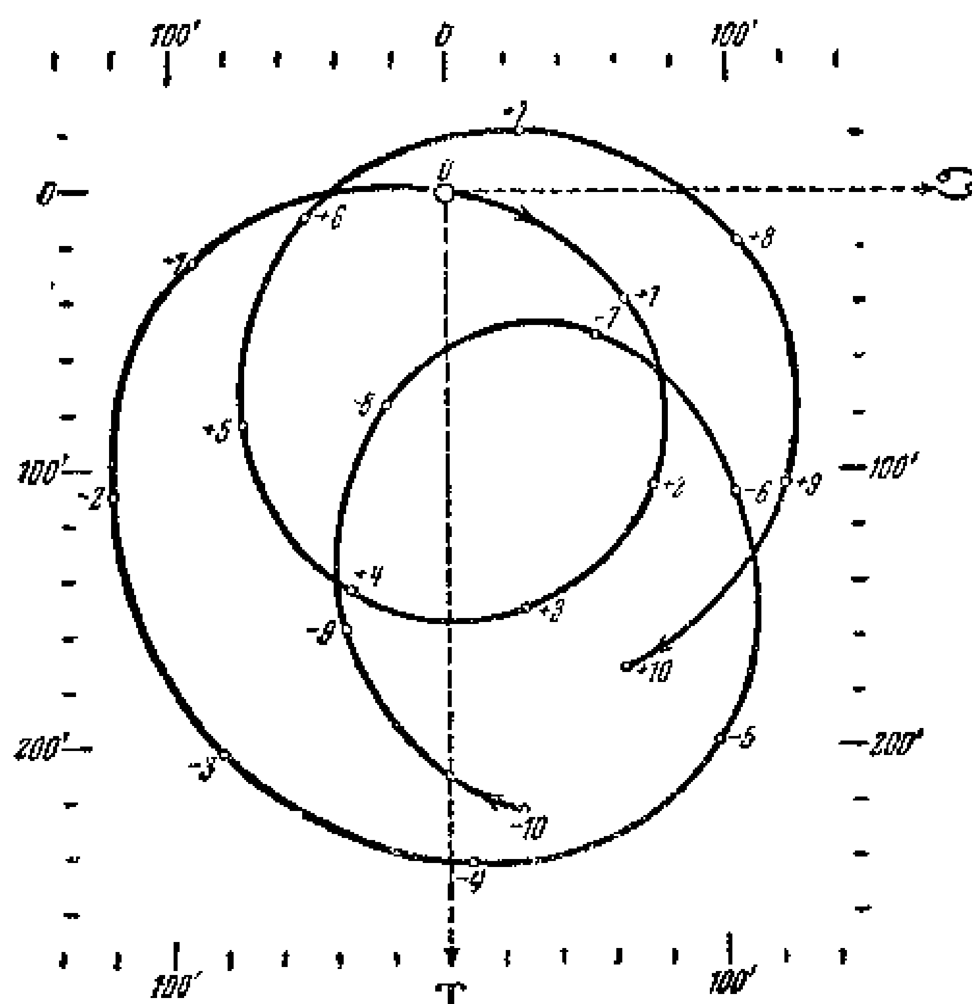


圖 54

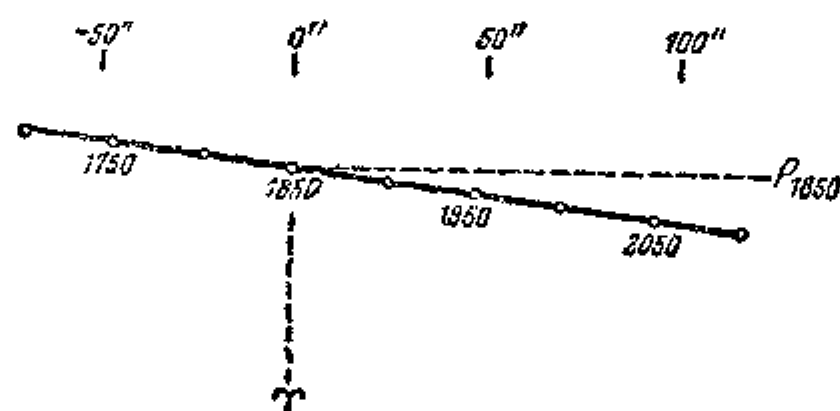


圖 55.

準確到 0″.01。

圖 56，甲表示黃極在天球上的運動，爲了使各種不同角度的數值更明顯一些，圖上就把黃極軌跡的曲率故意畫得大一些。Π_0 爲初始時刻的黃極(例如，在 1850 年初)；實的直線爲這時由 Π_0 至平均赤道的極 P_0 的方向。Π' 爲初始時刻之前某時刻（例如，100—200 年前）t' 時黃極的位置；Π'' 爲在其後某時刻 t'' 的位置。極 Π 的運動是緩慢的，每 100

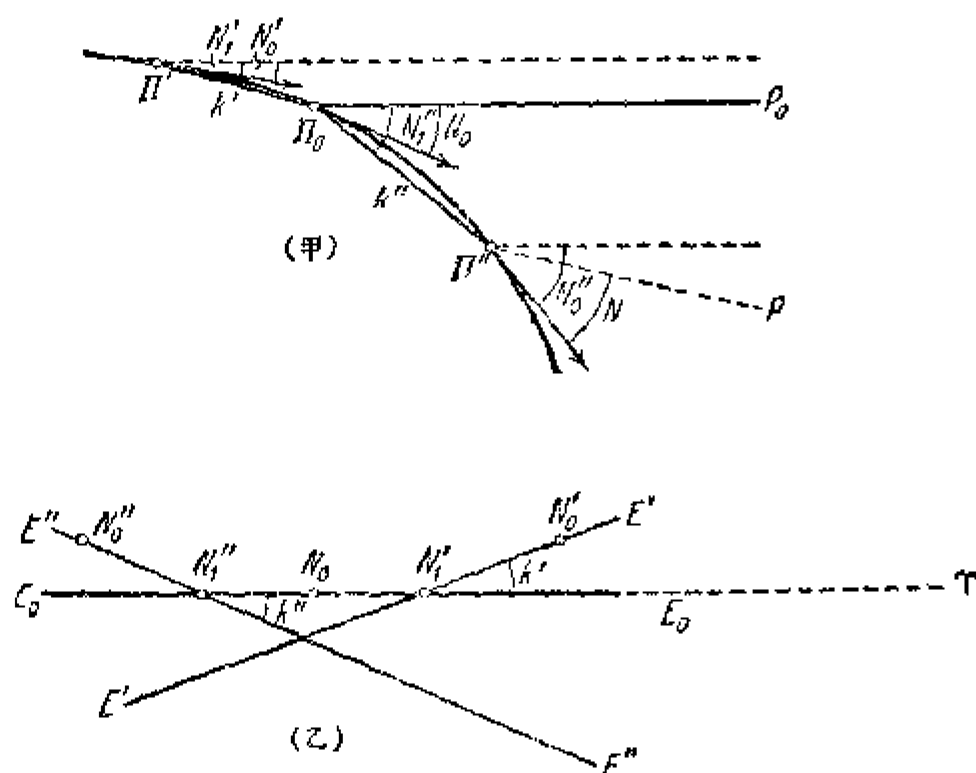


圖 56.

年中在大圓弧上只移動約47″,所以圖56,甲的整個圖形都可以當作平面圖形來研究，由圖上各點至赤極 P_0 的方向可以看做是互相平行的。各箭頭表示極的運動速度的方向；因此，它們是切於極的運動路徑的；它的稍微變化的速度以字母 $\varkappa$ 表示。在點 Π_0, Π', Π'' 的速度與至赤極的方向之間的角度分別以字母 N_0, N_0', N_0'' 表示。由極的路徑的曲率可知，$N_0'<N_0<N_0''$。在極 Π' 與 Π_0 之間的距離以字母 k' 表示，極 Π_0 與 Π'' 之間的距離以字母 k'' 表示；方向 $\Pi'\Pi_0$ 與方向 Π_0P_0 之間的角度以字母 N_1' 表示，$\Pi_0\Pi''$ 與 Π_0P_0 之間的角度以字母 N_1'' 表示；顯然，

$$N_0'<N_1'<N_0<N_1''<N_0''。$$

爲了從極的運動中推出與之對應的黃道在天球上的運動，必須注意：

（1）兩個圓的極之間的距離等於這兩個圓之間的夾角；因此，例如，對應於極 Π' 的黃道與極爲 Π_0 的黃道之間的交角爲 k'；和

（2）下列的考慮：當極由任一位置移至與之無限接近的位置（沿極的路徑的切線方向）時，黃道面就繞着瞬時的旋轉軸線而旋轉，這軸線連接一個大圓的兩極，而此大圓又通過極的路徑之切線方向。這兩個極中與春分點靠近的一個以字母 N_0 表示（N_0 帶有記號）。

在圖56，乙中爲了清楚起見以誇大的形式表示了黃道的運動（由外面看天球）。E_0E_0 爲初始時刻，卽1850年初的黃道。此時春分點位於點♈；這是通過 Π_0 和 P_0 的圓的極（圖56，甲）。這時極的路徑的切線方向與圓 Π_0P_0 之間的角爲 N_0；因此，黃道的瞬時轉動軸線與由秋分點至春分點的直線之間的交角等於 N_0；換句話說，黃道 E_0E_0 的瞬時轉動軸線的點 N_0 位於與點♈相距 N_0 的地方（圖56，甲），由極的路徑的位置可知，N_0 位於♈的左方（由天球的外面看去，北極在上方），正如同圖56，乙中所畫出的一樣。

對應於極 Π' 的在時刻 t' 的黃道 $E'E'$，與初始曆元的黃道之間的

交角為 k'，因為弧 $\Pi'\Pi_0$ 與 Π_0P_0 的交角為 N_1'，所以這兩個黃道的交點與 ♈ 的距離等於 N_1'；它們的交點也以符號 N_1' 表示。因為極的路徑在點 Π' 的切線與弧 Π_0P_0 的交角 N_1' 小於 N_1''，所以極為 Π' 的黃道的瞬時轉動軸線的末端（點 N_0'）比點 N_1' 更接近 ♈。

極在點 Π'' 的於時刻 t'' 的黃道 $E''E''$ 與黃道 E_0E_0 的交角等於 k''；弧 $\Pi_0\Pi''$ 與弧 Π_0P_0 的交角為 N_1''（$>N_0$），因此這些黃道的交點與點 ♈ 的距離為弧 N_1''，比 N_0 大；同時黃道 $E''E''$ 與黃道 $E'E'$ 分別傾斜於黃道 E_0E_0 的兩面，因為點 Π'' 比點 Π_0 更靠近極 P_0 一些，而點 Π' 比 Π_0 遠。最後，黃道 $E''E''$ 的瞬時轉動軸線的點 N_0'' 與點 ♈ 的距離比所有先前的點都遠些；這距離就是極的路徑在點 Π'' 的切線與由 Π'' 至赤極 P_0 的方向之間的交角 N_0''。

必須記住，在圖 56，乙中角 k' 及 k'' 放大很多（在 100 年中它們僅為 $47''$），由點♈至不同的點 N 的各個弧之差也是這樣的情形；在 1800—2000 年的時間裏所有的點 N 分佈於一度的範圍內，這範圍與春分點相距 6—7 度（參考 220 頁的表）。

這樣，從時刻 t' 至時刻 t''（及更後的時刻），黃道由位置 $E'E'$ 經過位置 E_0E_0 而到位置 $E''E''$；在每一個時刻它繞着瞬時軸線旋轉，軸線的末端由點 N_0' 逐漸地移到點 N_0 更進而到點 N_0''；在每一時刻黃道切於某一條曲線，瞬時轉動軸線的末端就是沿着這條曲線運動的（黃道在球上的位移可以與切點沿曲線運動時黃道面的移動比較）。

在天體力學中由行星在它們的相互吸引的作用下根據牛頓定律而運動的理論得到與此問題有關的各個量的數值。根據現在所採用的紐康的研究，黃道每世紀的旋轉速度 $\varkappa$ 的值以及瞬時旋轉軸線與 1850 年的春分點的距離 N_0 對於 1600 年，1850 年及 2100 年而推出的值都是初始的值。從這些初始的值可用內插法而求出在指定的時間範圍內任何時刻的值。由它們所推出的一些值，列於下面的表中。

	$\varkappa$	N_0	N_1	k	N	$\varkappa\cos N$	$\varkappa\sin N$
1600	47″.316	5°17′.90					
1750	.210	6 01 .36	6°15′.81	−47″.176	7°25′.09	46″.814	6″.094
1800	.175	15 .84	23 .07	−23 .579	6 57 .71	828	5 .718
1850	.141	30 .32	30 .32	0 .000	6 30 .32	837	5 .341
1900	.107	44 .81	37 .55	+23 .562	6 2 .91	.844	4 .964
1950	.074	6 59 .30	44 .79	47 .107	5 35 .55	.849	4 .587
2000	.041	7 13 .80	52 .04	70 .636	5 8 .17	851	4 .211
2050	47 .008	28 .31	6 59 .28	94 .147	4 40 .78	.851	3 .835
2100	46 .976	7 42 .82	7 6 .52	117 .642	4 13 .40	46 .848	3 .459

在上面的論述中，各個方向都是以弧 Π_0P_0 爲參考的，然而平均赤極 P 本身是繞黃極 Π 而運動的，所以，譬如說，在時刻 t'' 時由極 Π'' 至這個時刻的赤極的方向是弧 $\Pi''P$。

相應地，春分點 ♈ 將來在球上將位移到在以後的世紀中點 N 所在的那邊去，也就是在圖 56，乙中的左面。我們將在 §87 中看到，春分點的速度是每年 50″.245 或每世紀 83′.742。

因此黃道的瞬時旋轉軸線的末端與春分點的距離在這個時刻（而非在初始時刻）將異於角 N_0；以字母 N 表示這個距離時，卽有：$N=$ $=N_0-83'.742\ T$，其中 T 爲由初始曆元（1850 年）到所討論的時刻的世紀數。

從基本的數字卽可得到 N_0 的公式；此卽

$$N_0=6°30'.32+28'.972\ T+0'.011\ T^2,$$

從其中捨去帶有 T^2 的項後，得

$$N=N_0-83'.742\ T=6°30'.32-54'.770\ T。$$

N 的値列於表中。

§86. 平均極和平均赤道的運動 地球在月球和太陽對它的質點的引力作用下繞着它的重心而自轉着，由這種自轉的理論卽可作出結論：地球的自轉軸線不能在空間中保持不變的方向，而應當繞着黃道平面的垂線而畫出波狀的錐形表面，赤極則在天球上繞着黃極畫出類似

圓形的波狀曲線。正如已經說過的，赤極的運動可分爲平均極繞着黃極的進動和眞極繞着平均極的章動。

平均極運動速度的方向在每一時刻都是沿着大圓弧而且垂直於連接此時刻的黃極與赤極的弧，換句話說，平均極的運動速度永遠指向天球上此時刻的平均春分點。這個速度的大小以字母 n 表示。它可用公式表爲：$n=\boldsymbol{P}\sin\varepsilon\cos\varepsilon$，其中 ε 爲此時刻黃道與平均赤道的交角，而 $\boldsymbol{P}$ 爲某個常數，它決定於地球的大小，地球內部質量的分佈（密度），以及月球繞地球的軌道和地月系統繞太陽的軌道的要素。

$\boldsymbol{P}$ 的數值由觀測來確定，也就是說，對同一些恆星，每經過一個很長的時間間隔，測得一些不同的坐標，將這些坐標加以比較來確定 $\boldsymbol{P}$ 的數值；這一點我們將在第十二章中討論；現在只給出紐康所定出的值：$\boldsymbol{P}=54''.9066$ 每回歸年，每 100 年僅減少 0.0000364。

假若黃極不移動，那末 ε 就不會改變，速度 $n=54''.9066\sin\varepsilon\cos\varepsilon$ 就會是常數，且平均赤極就會繞着靜止的黃極而沿圓周運動(圖 57)。它的轉動的角速度就會是 $n/\sin\varepsilon=54''.9066\cos\varepsilon$ 每年，且赤極繞黃極完成一次封閉的圓周運動就需時 $\frac{360\cdot60\cdot60''}{54''.9066\cos\varepsilon}$ 年；取 $\varepsilon=23°27'$，這個時間就是 25729 年。在這種情形下好像是固定在赤道上的春分點就會沿靜止的黃道而滑動，滑動的速度同樣是每年 $54''.9066\cos\varepsilon=50''.371$。

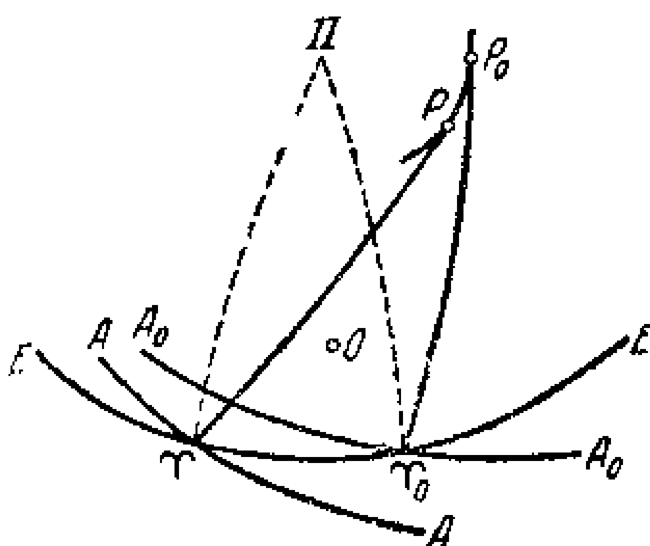


圖 57.

然而黃極是運動着的，因此 ε 並不是不變的；目前黃極每世紀接近赤極 47″，而在幾萬年的時期裏有時接近它，有時又離開它（參考圖 54），因此平均赤極並不是沿着圓周而是沿着螺線運動的，有時旋繞起來，有時又旋開了。在圖 58 中畫出了北赤極和北黃極（在圖的中心）在恆星間的運動，時間是從紀元前

8000年至紀元後18000年。然而永遠是這樣的，在每一時刻平均赤極向着此時刻的平均春分點而運動，運動的速度是每回歸年 $n=54''.9066\times\times\cos\varepsilon\sin\varepsilon$，而春分點沿黃道的速度等於每回歸年 $54''.9066\cos\varepsilon$；這個速度以字母 p 表示。

因為春分點的這種運動是由月球和太陽的作用而生的，所以這種歲差又稱為黃經的日月歲差；以後我們將看到，還有另外一種歲差，這種歲差來自行星，由黃道的運動而生的，並非由於赤道的運動。

由於春分點沿着黃道的運動，所有恆星的黃經每年增加 p 角秒（圖59中的 ♈L），黃緯却不變。我們將把春分點沿着黃道運動的這個速度 p 分為兩個部份：一為沿赤道的 ♈M（等於 $p\cos\varepsilon$），另一為垂直於赤道的

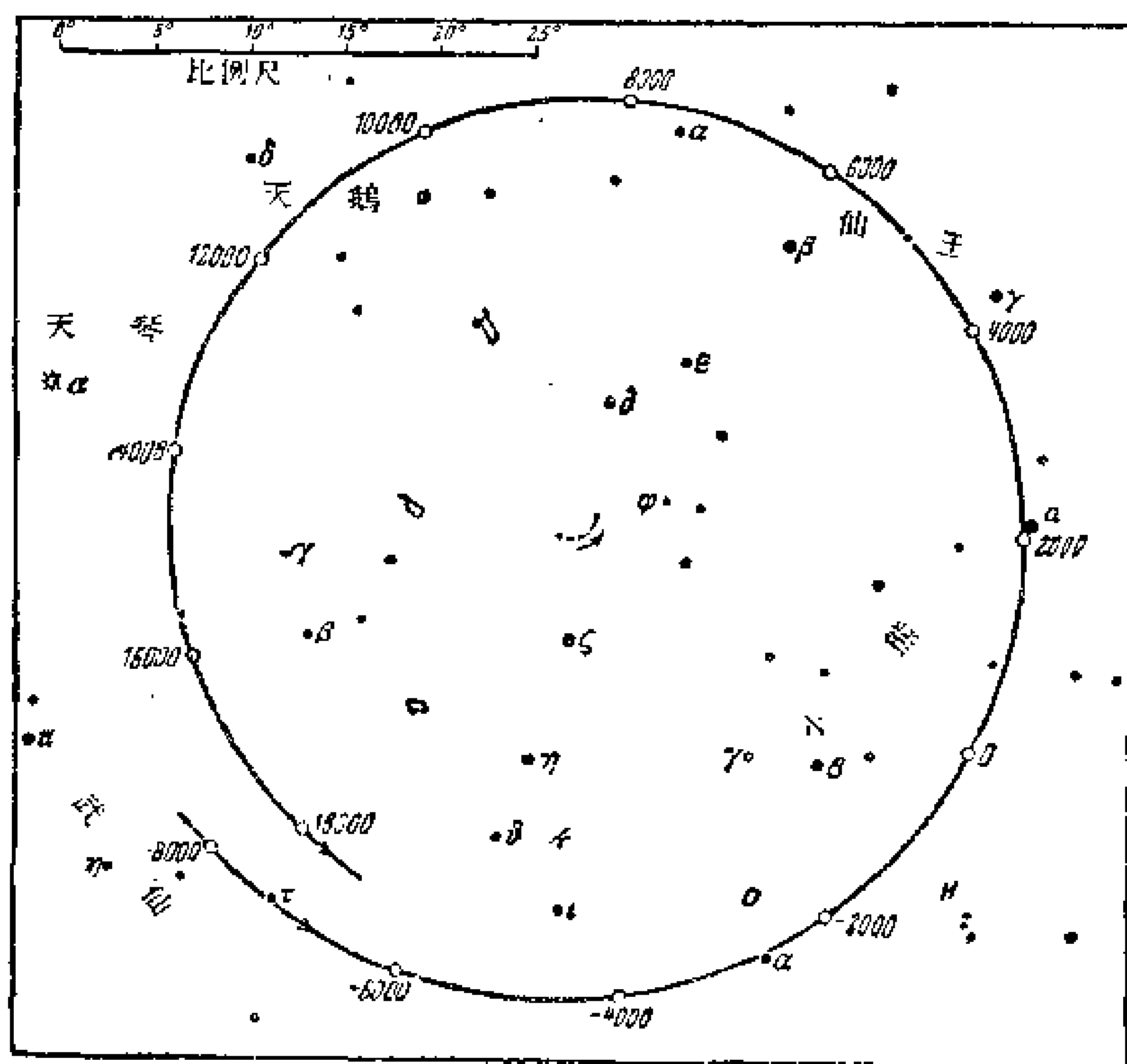


圖 58.

ΥK($p\sin\varepsilon=n$)。第一個，$p\cos\varepsilon$，是通過赤極和春分點的圓周繞着圖57中的軸線 OP_0 而旋轉的瞬時速度；赤經就是由這個圓計算的；因此它的繞着軸線 OP_0 在與計算 α 相反的方向的繞轉，就引起了所有恆星的赤經的增加，增加的速度是每年 $p\cos\varepsilon$。這就是赤經的日月歲差。第二個分量 $p\sin\varepsilon$，是極 P 向着春分點運動的速度，因此，就是春分點在天球上沿着與赤道垂直的方向運動的速度，或者也就是赤道繞着瞬時軸線旋轉的速度，這軸線通過赤道上的赤經為 6^h 和 18^h 的點；由於這種旋轉赤經為 0^h 的恆星的赤緯以每年 n 秒的速度增加着，$\alpha=12^h$ 的恆星的赤緯以同樣的速度減小着，而 $\alpha=6^h$ 和 $\alpha=18^h$ 的恆星的赤緯在這時刻的速度等於零。一般的公式將在後面推出（參考§88）。

這樣，黃經的日月歲差等於 $p=\boldsymbol{P}\cos\varepsilon$；赤經的日月歲差等於

$$p\cos\varepsilon=\boldsymbol{P}\cos^2\varepsilon\text{。}$$

赤緯的日月歲差或者極 P 向着春分點運動的速度等於

$$n=p\sin\varepsilon=\boldsymbol{P}\sin\varepsilon\cos\varepsilon\text{。}$$

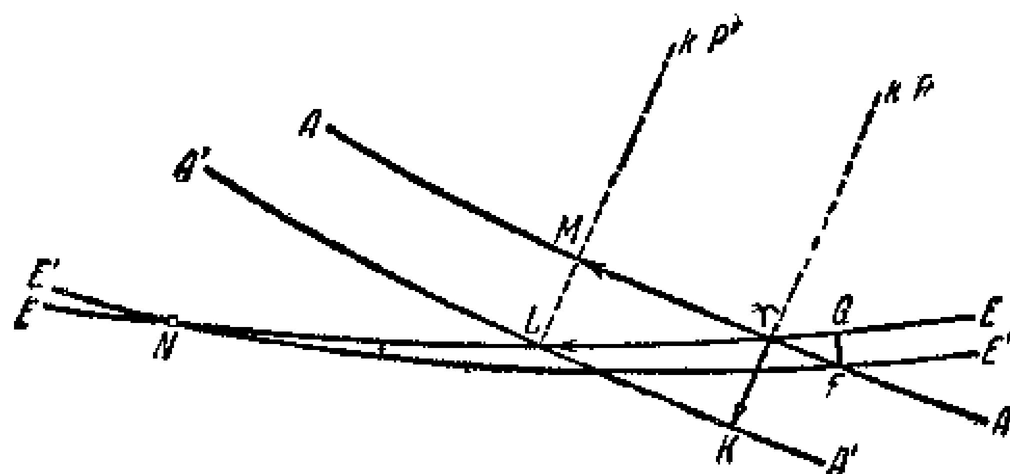


圖 59.

§87. 黃道和平均赤道的運動的結合 現在我們必須研究一下，由於黃道和平均赤道的同時的運動，春分點的運動是怎樣的，並且由於這兩種運動它的瞬時速度在給定的時刻是怎樣的。在以前幾節裏我們看到了，由於日月歲差的緣故春分點沿黃道的速度為 p，沿赤道的為 $p\cos\varepsilon$。垂直於赤道的為 $p\sin\varepsilon$。在圖59中以箭頭表示這些速度；

同時這些箭頭的長度可以當作春分點在無限小的時間 dt 內的位移：$\Upsilon L=pdt$；$\Upsilon M=p\cos\varepsilon\, dt$；$\Upsilon K=p\sin\varepsilon\, dt$；$AA$ 爲赤道在給定的時刻 t 的位置，$A'A'$ 爲赤道在時刻 $t+dt$ 的位置。

但是正如在 §85 中敍述過的，黃道在其平面上繞着瞬時轉動軸線而旋轉，同時，在這個時刻 t 與春分點最接近的軸線的末端和春分點的距離爲 $N=6°30'.32-54'.770\,T$，其中 T 爲由 1850 年初到所研究的時刻的以回歸世紀爲單位的時間間隔，黃道繞着這條軸線旋轉的速度爲 $\varkappa$，它隨着時間緩慢地變化的數值已在第 220 頁的表中給出了。因此，假若 EE 表示黃道在時刻 t 的位置，而 $E'E'$ 爲在時刻 $t+dt$ 的位置，N 表示瞬時旋轉軸線的末端，則 $N\Upsilon=N$，而在 N 的情形下兩黃道之間的角等於 $\varkappa dt$。我們將以字母 F 表示黃道 $E'E'$ 與赤道 AA 的交點，於是由窄球面三角形 ΥNF 得：

$$\sin\Upsilon F:\sin\varkappa\, dt=\sin NF:\sin\varepsilon,$$

由此式、取極限，卽得，由於黃道的運動，等於 $\frac{\Upsilon F}{dt}$ 的春分點沿赤道 AA 運動的速度等於 $\frac{\varkappa\sin N}{\sin\varepsilon}$。

所有恆星的赤經都以這樣的速度而減小着；這種減小稱爲赤經的行星歲差，因爲是由黃道的運動而引起的；我們以字母 λ' 表示它，卽得

$$\lambda'=\varkappa\sin N\csc\varepsilon。$$

若由點 F 向黃道引垂線至點 G，則 $\Upsilon G=\Upsilon F\cos\varepsilon=\varkappa\sin N\cot\varepsilon\, dt$，由圖可以看出，由於春分點沿黃道的這種運動，所有恆星的黃經都在減小，瞬時速度爲 $\varkappa\sin N\cot\varepsilon=\lambda'\cos\varepsilon$；黃經的這種減小稱爲黃經的行星歲差。

把黃經的日月歲差 p 以及行星歲差 $-\lambda'\cos\varepsilon$ 加在一起，就得到了所謂的黃經的總歲差；用字母 l 來表示；這樣一來，春分點沿黃道的運動速度就是：

$$l=p-\lambda'\cos\varepsilon=\boldsymbol{P}\cos\varepsilon-\varkappa\sin N\cot\varepsilon。\tag{103}$$

把赤經的日月歲差 $p\cos\varepsilon$ 和行星歲差 λ' 加在一起以後，我們就得到了赤經的總歲差；它用字母 m 表示；春分點沿赤道運動的速度爲

$$m=p\cos\varepsilon-\lambda'=\boldsymbol{P}\cos^2\varepsilon-\varkappa\sin N\csc\varepsilon。\qquad(104)$$

黃道與赤道的交角，等於黃極 Π 與赤極 P 之間的弧，這個交角是因黃極的運動而變化着；從圖 56，甲、乙可以看出，在每一時刻極 Π 的運動速度是 $\varkappa$，而它的運動方向與弧 ΠP 的交角爲 N；因此 $\varkappa$ 在弧 ΠP 上的投影等於 $\varkappa\cos N$，這也就是弧 ΠP 的減小速度，弧 ΠP 即交角 ε，因此

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=-\varkappa\cos N。\qquad(105)$$

必須記住，N 是在所討論的時刻黃道的瞬時旋轉軸線與春分點的距離（參考 §85 之末）。

由上述可以看出，量 l，m，n 是量 $\boldsymbol{P}$（這在幾千年的時期中可以當作常數）和量 ε，$\varkappa$，N 的函數，ε，$\varkappa$ 和 N 隨着時間而緩慢地變化着；因此 l，m，n 也在緩慢地變化着。它們的數值曾經幾次由下列兩方面合起來求得：（1）黃道的運動以及地球自轉的理論，（2）恆星坐標的觀測，觀測時的曆元相距幾十年，開始於布拉得雷從 1750 到 1762 年在格林尼治所進行的觀測。

下面這些數字是根據紐康的研究得到的（速度以回歸世紀爲時間單位，ε 爲平均值），這些數字已根據國際間的同意而被採用於相應的計算[1]。

	100 n		100 m		100 p
1750	2005″.96	133ˢ.731	4604″.32	306ˢ.955	5036″.34
1800	5 .54	3 .703	05 .72	7 .048	36 .59
1850	5 .11	3 .674	07 .11	7 .141	36 .84
1900	4 .68	3 .645	08 .51	7 .234	37 .08
1950	4 .25	3 .617	09 .90	7 .327	37 .33
2000	2003 .83	133 .589	4611 .30	307 .420	5037 .58

[1] 紐康曾經兩次定出歲差常數：第一次是由於要確定四個類地行星的軌道而來定歲差常數的，第二次是在專題研究裏測定的。這裏給出的是他第二次的結果。

	100 l	100 λ'	100 $\lambda' \cos \varepsilon$	ε
1750	5022.30	15″.30	14″.04	23°28′18″.51
1800	23.42	14 .36	13 .17	27 55 .10
1850	24.53	13 .41	12 .31	27 31 .68
1900	25.64	12 .46	11 .44	27 08 .26
1950	26.75	11 .53	10 .58	26 44 .84
2000	5027.86	10 .59	9 .72	23 26 21 .41

安杜阿耶以級數的形式給出了下列的準確公式:

$$m=46''.08506+0''.027945\,T+0''.00012\,T^2;$$

$$n=20''.04685-0''.008533\,T-0''.00037\,T^2,$$

其中 T 表示 1900.0 之後的回歸世紀數。

§88. α 和 δ 因歲差而變化的速度 $\frac{d\alpha}{dt}$ 和 $\frac{d\delta}{dt}$ 得到了關於在給定時刻極的運動和黃道面與平均赤道面的運動以及關於它們的速度的清楚概念以後,我們現在就可以來研究在給定時刻任何恆星的坐標 α 和 δ 的變化速度 $\frac{d\alpha}{dt}$ 和 $\frac{d\delta}{dt}$ 的推導了。$\frac{d\delta}{dt}$ 的推導是比較簡單的,因爲 $\frac{d\delta}{dt}$ 僅决定於赤極的運動。設圖 60 中的 Π, P, S 爲在給定時刻 t 黃極、平均赤極以及恆星在天球上的位置。在無限小的時間 τ 中極 P 位移到 P',它的運動是向着這個時刻的平均春分點的;因此恆星 S 的赤經等於角 ΥPS,弧 $PP'=n\tau$,其中 n 有着先前的值(約每年 20″)。在窄球面三角形 PSP' 中有: $PS=90°-\delta$, $P'S=90°-\delta'$; δ 及 δ' 爲在時刻 t 及 $t+\tau$ 時恆星的赤緯。作 $P'K$ 垂直於 PS 後,得 $PK=$ $=PP'\cos\alpha=\tau n\cos\alpha$; 準確到第二級的小量時 $P'S=KS$; 因此 $PS-$ $-P'S=(90°-\delta)-(90°-\delta')=\tau n\cos\alpha$; 由此 $\frac{\delta'-\delta}{\tau}=n\cos\alpha$; 取極限後得:

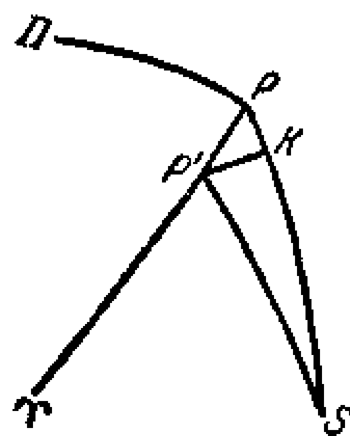


圖 60.

$$\frac{d\delta}{dt}=n\cos\alpha\,。\tag{106}$$

所以 $\frac{d\delta}{dt}$ 只和 α 有關; α 在變化着, n 也在很慢地變化着, 所以 $\frac{d\delta}{dt}$

隨着時間變化。

在推求 $\frac{d\alpha}{dt}$ 時必須記住，$\frac{d\alpha}{dt}$ 由兩部份構成：(1)正如我們在§87中所看到的，平均春分點在赤道上的速度等於每年 m，因此所有恆星的赤經也以每年 m 的同樣速度而增加着；(2)由於平均極向着平均春分點運動，赤經圈在天球上的位置就發生了變化，這種變化隨恆星而異；在圖61中 PP' 是在時間 τ 內極的無限小的變化；AA 和 $A'A'$ 是在時刻 t 和 $t+\tau$ 時平均赤道的一部份的無限接近的位置。赤經圈爲 PSD 及 $P'SD'$；它們都垂直於赤道；弧 DB 和 CD' 的差別只是第二級的量，原因是弧 AA 無限地靠近 $A'A'$，而角 DSD' 又是無限地小；若只準確到第一級的量時，它們中的每一個都等於恆星 S 的赤經圈與赤道的交點的未知位移。而且，$PS=90°-\delta$；$SD=\delta$；因爲在點 S 的角 S 是無限小，故由三角形 PSP' 得：

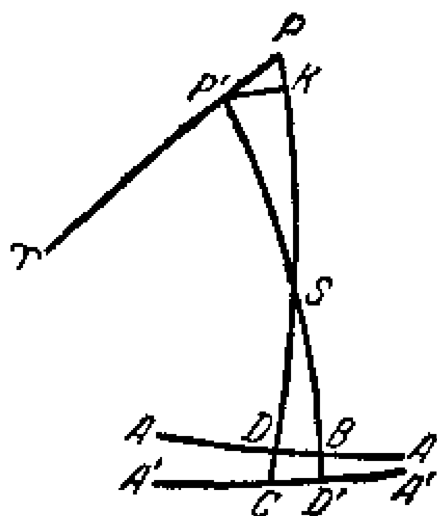


圖 61.

$$P'K=PP'\sin\alpha=S\sin P'S=S\cos\delta',$$

而由三角形 DSB 得：$DB=S\sin SD=S\sin\delta$。

因此 $S=\frac{PP'\sin\alpha}{\cos\delta'}=\frac{DB}{\sin\delta}$；由此式 $DB=PP'\sin\alpha\frac{\sin\delta}{\cos\delta'}$，

但 $PP'=n\tau$，因此

$$\frac{DB}{\tau}=n\sin\alpha\frac{\sin\delta}{\cos\delta'}。$$

取極限後，我們得到，點 D 沿赤道的位移等於每年 $n\sin\alpha\tan\delta$。把它與赤經的總歲差 m 相加，最後得到

$$\frac{d\alpha}{dt}=m+n\sin\alpha\tan\delta。\tag{107}$$

$\frac{d\alpha}{dt}$ 隨時間而變化，這種變化與 m 和 n 的變化的關係很小，主要是因 α 和 δ 的變化。

只考慮極 Π 和 P 的運動而給出 $\frac{d\alpha}{dt}$ 的另一種推導，這對於把這個問題搞清楚是有幫助的。在圖 62 中 Π 和 P 是在時刻 t 的黃極和赤極；Π' 和 P' 是在時刻 $t+dt$ 的；S 為恆星的位置。因此 $\Pi PS=90^\circ+\alpha$；$\Pi'P'S=90^\circ+\alpha'$。弧 $\Pi\Pi'=\varkappa dt$，角 $P\Pi\Pi'$ 為 N（參考以前的意義）；無限小的角 $\Pi P'\Pi'=\frac{\varkappa dt\sin N}{\sin\varepsilon}=\lambda' dt$；因此角 $\Pi P'S=90^\circ+\alpha'+\lambda' dt$。

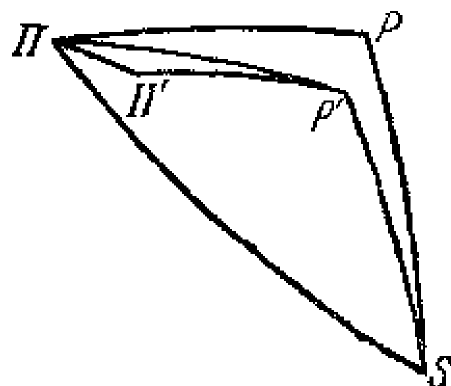


圖 62.

於是由三角形 ΠPS 得：

$$\cos\Pi S=\cos\varepsilon\sin\delta-\sin\varepsilon\cos\delta\sin\alpha,$$

而由三角形 $\Pi P'S$：

$$\cos\Pi S=\cos\varepsilon\sin\delta'-\sin\varepsilon\cos\delta'\sin(\alpha'+\lambda' dt)。$$

從 $\cos\Pi S$ 的第一式減去第二式並除以 $\sin\varepsilon$，得：

$$\cot\varepsilon(\sin\delta'-\sin\delta)=\cos\delta'\sin(\alpha'+\lambda' dt)-\cos\delta\sin\alpha。$$

若只取 dt 的第一級小量，且記作 $\delta'-\delta=n\cos\alpha\, dt$，則容易把最後的式子變成：

$$\begin{aligned}\cot\varepsilon\cdot n\cos\alpha\, dt\cdot\cos\delta&=\\&=(\cos\delta-n\cos\alpha\, dt\sin\delta)(\sin\alpha'+\lambda' dt\cos\alpha')-\cos\delta\sin\alpha=\\&=\cos\delta(\sin\alpha'-\sin\alpha)-n\, dt\sin\alpha\cos\alpha\sin\delta+\lambda' dt\cos\alpha\cos\delta=\\&=\cos\delta(\alpha'-\alpha)\cos\alpha-n\, dt\sin\alpha\cos\alpha\sin\delta+\lambda' dt\cos\alpha\cos\delta。\end{aligned}$$

由此，除以 $\cos\alpha\cos\delta$ 得：

$$\alpha'-\alpha=n\, dt\cot\varepsilon-\lambda' dt+n\, dt\sin\alpha\tan\delta。$$

因此，

$$\frac{\alpha'-\alpha}{dt}=\frac{d\alpha}{dt}=(n\cot\varepsilon-\lambda')+n\sin\alpha\tan\delta=m+n\sin\alpha\tan\delta。$$

§89. α 和 δ 的歲差的公式　有了速度的公式

$$\frac{d\alpha}{dt}=m+n\sin\alpha\tan\delta \text{ 和 } \frac{d\delta}{dt}=n\cos\alpha$$

且知道了在時刻 t 恆星的平均坐標，我們現在應當來求在時刻 t' 的平均

坐標 α' 和 δ'，t' 與 t 相距幾年，幾十年或者一年的幾分之幾。換句話說，必須取這兩個聯立微分方程式的積分，但此時要考慮到 m 和 n 是在慢慢地變化着。這個問題的嚴格的解是得不到的，為要計算 $\alpha'-\alpha$ 和 $\delta'-\delta$ 我們運用級數，這可根據泰勒(Taylor)定理求得。我們有：

$$\alpha'=\alpha+(t'-t)\Big|_t\frac{d\alpha}{dt}+\frac{1}{2}(t'-t)^2\Big|_t\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\frac{1}{6}(t'-t)^3\Big|_t\frac{d^3\alpha}{dt^3}+\cdots$$

$$\delta'=\delta+(t'-t)\Big|_t\frac{d\delta}{dt}+\frac{1}{2}(t'-t)^2\Big|_t\frac{d^2\delta}{dt^2}+\frac{1}{6}(t'-t)^3\Big|_t\frac{d^3\delta}{dt^3}+\cdots$$

對於初始時刻 t 的 $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$，$\frac{d^3\alpha}{dt^3}$，…，$\frac{d^2\delta}{dt^2}$，$\frac{d^3\delta}{dt^3}$，…的值可由微分 $\frac{d\alpha}{dt}$ 和 $\frac{d\delta}{dt}$ 兩式而求得，取回歸年為時間單位。

例如，

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}=\frac{dm}{dt}+\frac{dn}{dt}\sin\alpha\tan\delta+n\cos\alpha\tan\delta(m+n\sin\alpha\tan\delta)+$$

$$+n^2\sin\alpha\sec^2\delta\cos\alpha=\left(\frac{dm}{dt}+\frac{1}{2}n^2\sin 2\alpha\right)+$$

$$+\left(\frac{dn}{dt}\sin\alpha+mn\cos\alpha\right)\tan\delta+n^2\sin 2\alpha\tan^2\delta=$$

$$=A+B\tan\delta+C\tan^2\delta,$$

$$\frac{d^2\delta}{dt^2}=\frac{dn}{dt}\cos\alpha-n\sin\alpha(m+n\sin\alpha\tan\delta)=$$

$$=\left(\frac{dn}{dt}\cos\alpha-mn\sin\alpha\right)-n^2\sin^2\alpha\tan\delta=$$

$$=A'+B'\tan\delta\text{。}$$

$\frac{d^3\alpha}{dt^3}$ 和 $\frac{d^3\delta}{dt^3}$ 由於它們的複雜性，我們不列出了。導數 $\frac{d\alpha}{dt}$，$\frac{d^2\alpha}{dt^2}$，$\frac{d^3\alpha}{dt^3}$ 以時秒表示，而導數 $\frac{d\delta}{dt}$，$\frac{d^2\delta}{dt^2}$，$\frac{d^3\delta}{dt^3}$ 則以角秒表示。

帶有 $(t'-t)$ 的一次冪的項稱為對於給定的恆星和給定的時刻 t 的歲差的第一項；帶有 $(t'-t)^2$ 的為第二項，帶有 $(t'-t)^3$ 的為第三項。

事實上，由所希望的準確度（到0″.01 或 0″.1）且根據赤緯的值看

來，卽使$(t'-t)$達到了25—50年，也可以只取頭兩項，只有當恆星的赤緯很大時才注意到第三項，原因是$\tan\delta$和$\sec\delta$的值是大的。根據同樣的理由，對於十分靠近極的恆星$(\delta>80°)$，這些公式一般地是不能採用的，需要應用準確的公式，這種公式將於後面的§91中推出。

§90. 實際上α和δ的歲差的計算法 除了歲差的影響以外，恆星的坐標尙因其自行（每年μ角秒）而變化。凡恆星坐標的變化係與時間成正比，而與光行差無關者，稱爲自行。只有少數恆星，其自行才超過每年1″；對於大多數恆星其自行都小於每年0″.100，在較好的情形下確定自行時，其可能的誤差在0″.002之內。在幾個世紀的時期中自行是均勻地沿着大圓弧的，但因恆星的赤經圈由於極的運動而繞着恆星旋轉，所以μ在赤經圈上的投影μ_δ，以及在赤緯圈上的投影$\mu_\alpha\cos\delta$，是隨着時間而變化的，然而這種變化緩慢到只在很少的情形下——相當大的μ以及當恆星靠近極時——才需要注意到它。除了這些情形以外，自行對恆星坐標的影響只不過是：在$(t-t_0)$的時間中赤經增加了$\mu_\alpha(t-t_0)$，赤緯增加了$\mu_\delta(t-t_0)$。

因此爲計算歲差影響而推出的公式變成爲：

$$\left.\begin{aligned}\alpha=\alpha_0+\mu_\alpha(t-t_0)+(t-t_0)\left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{t_0}+\frac{1}{2}(t-t_0)^2\left.\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right|_{t_0}+\\+\frac{1}{6}(t-t_0)^3\left.\frac{d^3\alpha}{dt^3}\right|_{t_0}+\cdots\\ \delta=\delta_0+\mu_\delta(t-t_0)+(t-t_0)\left.\frac{d\delta}{dt}\right|_{t_0}+\frac{1}{2}(t-t_0)^2\left.\frac{d^2\delta}{dt^2}\right|_{t_0}+\\+\frac{1}{6}(t-t_0)^3\left.\frac{d^3\delta}{dt^3}\right|_{t_0}+\cdots\end{aligned}\right\}\quad(108)$$

這些公式的用途是這樣的：知道了對於在時刻t_0的平均赤道和黃道的位置（簡言之：對於春分點）而言的恆星坐標後，卽可計算對於在時刻t的平均赤道和黃道的位置（對於春分點）而言的這些恆星的坐標，其中也考慮到自行。

t_0 時刻的坐標載於恆星位置的表中❶。時刻 t_0（t 亦然）總是選在所謂的白塞耳年之初，白塞耳年將在 §96 中討論；因此時間 $(t-t_0)$ 總是整數個回歸年。爲了計算便利起見，在表中除了 α_0 和 δ_0 以外還給出另外一些量，但這些量並非在所有的表中都是同樣的；對這一點必須予以注意。我們將討論一些最普遍的情形。

除了 α_0 和 δ_0 以外也給出 t_0 時刻的 $\frac{d\alpha}{dt}$ 和 $\frac{d\delta}{dt}$；這就是周年歲差——praecessio annua，簡寫爲 praec. an.；在特別的行中給出了周年自行 μ_α 和 μ_δ。但是經常給出的不是 $\frac{d\alpha}{dt}$ 和 $\frac{d\delta}{dt}$ 而是和數：$\left(\frac{d\alpha}{dt}+\mu_\alpha\right)$ 以及 $\left(\frac{d\delta}{dt}+\mu_\delta\right)$；它們稱爲年變——variatio annua，簡寫爲 var. an.。在特別的行中給出了周年歲差的長期變化，variatio saecularis，簡寫爲 var. saec.。對於時刻 t_0 它們等於 $100\frac{d}{dt}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)=100\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ 和 $100\frac{d^2\delta}{dt^2}$。

有了這樣的量就得到公式：

$$\alpha=\alpha_0+(t-t_0)\text{ var. an.}+\frac{(t-t_0)^2}{200}\text{ var. saec.}+\text{第 3 項。}$$

對於 δ 也有類似的情形。根據下面的公式來進行計算更方便些：

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\alpha_0+(t-t_0)\left[\text{var. an.}+\frac{t-t_0}{200}\text{ var. saec.}\right]+\text{第 3 項,}\\ \delta&=\delta_0+(t-t_0)\left[\text{var. an.}+\frac{t-t_0}{200}\text{ var. saec.}\right]+\text{第 3 項,}\end{aligned}\right\}\quad(109)$$

求第 3 項時可分別根據：

$$\frac{1}{6}\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^3\left[100^3\frac{d^3\alpha}{dt^3}\right]\text{ 或者 }\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^3\left[\frac{100^3}{6}\frac{d^3\alpha}{dt^3}\right],$$

方括號中給出各式的數值；在表的前言中指出，必須應用那一種公式以及用什麼樣的單位來表出括號的值。

1938 年國際天文協會的大會決定，今後自 1950 年起表中所用的時間單位不再是以前公式中所用的回歸年，而是用回歸世紀爲時間單位，

❶ 但請參閱此節中表後的說明。

記爲 T; 它是由表中的春分點算起的。這樣一來公式就成爲:

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\alpha_0+T[100\text{ var. an.}]+T^2\left[\frac{100}{2}\text{ var. saec.}\right]+\text{第 3 項},\\ \delta&=\delta_0+T[100\text{ var. an.}]+T^2\left[\frac{100}{2}\text{ var. saec.}\right]+\text{第 3 項}。\end{aligned}\right\}\quad(110)$$

今將仙后座 36 Hev. 的數據引作例子,這些數據是在下列四基本星表中給出的,其中兩本星表: NFK(Neuer Fundamental-Katalog), FK3(Dritter Fundamental-Katalog) 是柏林計算所編出的;另外一本 PGC (Preliminary General Catalogue),是路易士·包斯 (Lewis Boss) 編寫的,再有一本 GC(General Catalogue)是本雅明·包斯 (Benjamin Boss) 所編寫的。

各種星表中的仙后座 36 Hev.

NFK 星表。1875.0 和 1900.0 的春分點。№ 87

	α	$\frac{d\alpha}{dt}$	$\frac{d^2\alpha}{dt^2}$	μ_α	$\frac{d\mu_\alpha}{dt}$
1875	$2^h26^m11^s.451$	$+555^s.529$	$+20^s.352$	$-0^s.596$	$-0^s.006$
1900	28 30 .972	+560 .645	20 .583	0 .598	0 .006

	δ	$\frac{d\delta}{dt}$	$\frac{d^2\delta}{dt^2}$	μ_δ	$\frac{d\mu_\delta}{dt}$
1875	72°16′ 9″.83	+1612″.77	−48″.87	+2″.11	+0″.05
1900	22 51 .49	1600 .41	49 .96	2 .12	0 .05

FK 3 星表。1950.0 的春分點。№ 87

α	$\frac{d\alpha}{dT}$	$\frac{d^2\alpha}{dT^2}$	$100\,\mu$
$2^h33^m13^s.708$	$+570^s.848$	$+21^s.028$	$-0^s.802$

δ	$\frac{d\delta}{dT}$	$\frac{d^2\delta}{dT^2}$	$100\,\mu$
72°36′5″.55	+1575″.04	−52″.17	+2″.30

PGC 星表。1900.0 的春分點。№ 577

曆元	α	年變	長期變化	第 3 項	μ 和 $100\Delta\mu$	
1875.3	$2^h28^m30^s.993$	+5.6075	$+0^s.2059$	$+0^s.152$	$-0^s.0050$	0

第 3 項的計算 $=T^3\times$ 第 3 項

	δ					
1877.3	72°22′51″.57	+16″.003	−0″.500	−0″.74	+0″.020	0

GC 星表。1950.0 的春分點。№ 3116

	α					
1890.5	$2^h33^m13^s.819$	$+5^s.7104$	$+0^s.2104$	$+0^s.147$	$-0^s.0061$	0
	δ					
1898.7	$72°36'5''48$	$+15''.749$	$-0''.522$	$-0''.76$	$+0''.0220$	0

註：在NFK中給出了1875.0和1900.0的周年變化的一百倍以及自行，所不同的是現在它們的符號是 $\frac{d\alpha}{dT}$，$\frac{d^2\alpha}{dT^2}$，$100\,\mu_\alpha$ 等等，而在這表中它們被記爲 $\frac{d\alpha}{dt}$，$\frac{d^2\alpha}{dt^2}$，μ 等等。歲差處處都是採用紐康的值，但在編寫不同的星表時得到了不同的自行，因此年變（var.annua）也不同。假若計算對於1900.0的周年歲差，則由NFK得：$\frac{d\alpha}{dt}-\mu_\alpha=5.60645+0.00598=$ $=5.61243$；而由PGC：$5.6075+0.0030=5.6125$，兩者實際上是一樣的；對於赤緯的周年歲差由NFK：$+16.0041-0.0212=15.9829$，而由PGC：$16.003-0.020=15.983$。對於1950.0由FK3：$5.70848+0.00802=5.71650$ 而由GC：$5.7104+0.0061=5.7165$。在PGC和GC星表中曆元的值與平常的一樣，但所給出的恆星的平均位置則是與春分點一樣相同的時刻而言。

然而，必須記住，所指出的計算恆星自行的方法只屬於這樣的星表，在表中所給出的恆星在天上的平均位置與坐標系（春分點）的位置是對於相同的時刻而言。所有的基本星表都是這樣。也有其他的星表，由個別的天文台的觀測而得的，這些天文台所用的平均赤道和黃道的位置都屬於一個時刻 t_0，但在這一系統中恆星的平均位置却屬於另一個時刻 t_e；t_e 稱爲觀測曆元（爲什麼是這樣得到的，我們將在§100中看到）。在這些情形下不可能把歲差和自行聯系起來，而必須應用公式：

$$\alpha=\alpha_0+(t-t_e)\mu_\alpha+(t-t_0)\left[\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0+\frac{T}{2}\left(100\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)_0\right]+\text{第 3 項},$$

$$\delta=\delta_0+(t-t_e)\mu_\delta+(t-t_0)\left[\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_0+\frac{T}{2}\left(100\frac{d^2\delta}{dt^2}\right)_0\right]+\text{第 3 項}。$$

有時使用下面的方法是方便的。設 τ 爲 t_0 和 t 中間的時間，即 $\tau=$ $=\frac{1}{2}(t_0+t)$；α_τ，δ_τ 爲對於時刻 τ 而言的恆星坐標。於是得：

$$\alpha_0=\alpha_\tau+(t_0-\tau)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_\tau+\frac{1}{2}(t_0-\tau)^2\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)_\tau+\frac{1}{6}(t_0-\tau)^3\left(\frac{d^3\alpha}{dt^3}\right)_\tau+\cdots$$

$$\alpha=\alpha_\tau+(t-\tau)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_\tau+\frac{1}{2}(t-\tau)^2\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)_\tau+\frac{1}{6}(t-\tau)^3\left(\frac{d^3\alpha}{dt^3}\right)_\tau+\cdots$$

由 α 中減去 α_0 得:

$$\alpha=\alpha_0+(t-t_0)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_\tau+\frac{2}{6}\left(\frac{t-t_0}{2}\right)^3\left(\frac{d^3\alpha}{dt^3}\right)_\tau+\cdots \qquad (111)$$

同樣可得 δ 。

爲了應用這個公式,必須近似地算出 α_τ 和 δ_τ, 使能根據它們來算出(或由表中查出)在時刻 τ 的 $\frac{d\alpha}{dt}$ 和 $\frac{d\delta}{dt}$ 的值。第 3 項常可以省略,因爲它等於

$$\frac{1}{24}\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^3\left[100^3\frac{d^3\alpha}{dt^3}\right]。$$

爲使歲差的計算既方便又敏捷,就編出了一些輔助的表。其中最新的是:

(1) Precession Tables arranged for the use at the Royal Observatory, Greenwich, in connection with the Third Ten-Year Catalogue 1910 。Appendix I to the Greenwich Observations, 1908 。

(2) Präzessions—Tafeln 1925, 0 。Herausgeg. von R. Schorr. Hamburger Sternwarte in Bergedorf, 1927 。

(3) Präzessionstafeln für der Aequinoktium 1950, 0, bearbeitet von J. Peters, Veröff. d. Astronom. Recheninstituts zu Berlin N 50, 1934 。

在這些表中給出了對於量 α_0 的 $n^s\sin\alpha_0$ 和 $n''\cos\alpha_0$ 的數值,量 α_0 在均勻地變化着而且包括了赤經的所有小時,這樣就使得下面的計算很簡單了: $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0=m_0^s+n_0^s\sin\alpha_0\tan\delta_0$ 。在這些表中也給出了係數 A, B, C, A', B' 的數值,這些係數包含於長期變化的式子中:

$$100\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)_0=A+B\tan\delta+C\tan^2\delta_0;$$

$$100\left(\frac{d^2\delta}{dt^2}\right)_0=A'+B'\tan\delta 。$$

最後,給出了爲計算第三項的係數的數值(在 Precession Tables 中給

出了60°的赤緯時小於的第三項的總值)。爲了要表明由第3項推出的量，在下面的表中給出了T^3係數的最大值。在赤經方面當$\delta>0$時最大值出現於$\alpha=6^h0^m$，當$\delta<0$時最大值出現於$\alpha=18^h0^m$；在赤緯方面當$\delta>0$時最大值出現於$\alpha=3^h0^m$，當$\delta<0$時最大值出現於$\alpha=15^h0^m$。

表

$\alpha=6^h$ $\delta>0$	$0°$ $-0^s.005$	$30°$ $-0^s.018$	$60°$ $-0^s.093$	$70°$ $-0^s.238$	$80°$ $-1^s.314$	$\alpha=18^h$ $\delta<0$
$\alpha=3^h$ $\delta>0$	$-0''.13+$	$-0''.20+$	$-0''.41+$	$-0''.67+$	$-1''.81+$	$\alpha=15^h$ $\delta<0$

§91. 歲差的準確公式 設圖63表示由外面看來的天球的一部份。Π_0爲北黃極，P_0爲北平均赤極，兩者都是在曆元t_0時的值。在最近幾世紀中黃極近似地沿着跟弧Π_0P_0相交約7°角的大圓弧運動；平均赤極沿着圓周繞黃極而運動，運動的速度是這樣的，弧ΠP在70年中轉動1°；因此還得再過差不多500年弧ΠP才會與弧$\Pi_0\Pi$重合。在此以前設在曆元t時黃極位於點Π，赤極在點P。虛線表示赤極的路程；因爲速度的方向永遠垂直於弧ΠP，所以虛線在點P_0的切線垂直於Π_0P_0，而在點P的切線則垂直於ΠP；實線是大圓弧P_0P；它並不與虛線重合。根據天體力學的定理可以確定兩極的運動並且計算點Π_0，P_0，Π，P的相對位置，也就是計算量：(1)角$\Pi_0P_0P=90°-\zeta_0$，(2)弧$P_0P=\theta$和(3)角$\Pi PP_0=90°-z$，以上都是對於給定的值t_0和t而言的。已經編出ζ_0，z和θ的表，因此假設它們對於我們是已知的。在紐康的 Compendium of Spherical Astronomy 中以及在歲差的表中都有數字公式和表。

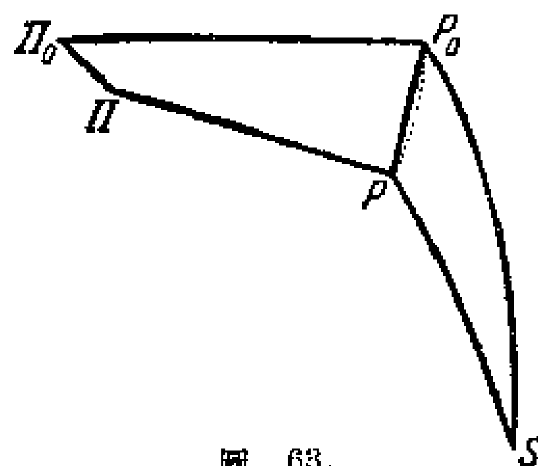


圖 63.

假若，和以前一樣，α_0和δ_0表示恆星S在曆元t_0時的平均坐標，而α及δ爲在曆元t時的平均坐標，那末角$\Pi_0P_0S=90°+\alpha_0$，而角$\Pi PS=$

$=90°+\alpha$。因此在球面三角形 P_0SP 中有：

$$角\ SP_0P=90°+\alpha_0-(90°-\zeta_0)=\alpha_0+\zeta_0,$$

$$角\ P_0PS=360°-(90°+\alpha)-(90°-z)=180°-(\alpha-z)。$$

$$邊：P_0P=\theta,\ P_0S=90°-\delta_0,\ PS=90°-\delta。$$

以字母 a_0 表示 $\alpha_0+\zeta_0$，以字母 a 表示 $\alpha-z$。

根據球面三角的基本公式：

$$\left.\begin{aligned}\cos\delta\sin a&=\cos\delta_0\sin a_0,\\ \cos\delta\cos a&=\cos\theta\cos\delta_0\cos a_0-\sin\theta\sin\delta_0,\\ \sin\delta&=\sin\theta\cos\delta_0\cos a_0+\cos\theta\sin\delta_0。\end{aligned}\right\}\qquad(112)$$

這裏給出的是 α_0 和 δ_0，由表得出的是 ζ_0，z 和 θ，所需要求出的是 α 和 δ。將第一個方程式乘以 $\cos a_0$，第二個乘以 $\sin a_0$，並由第一個中減去，然後將第一個乘以 $\sin a_0$，第二個乘以 $\cos a_0$ 並相加。卽得：

$$\cos\delta\sin(a-a_0)=\sin a_0\cos\delta_0(\cos a_0-\cos\theta\cos a_0+\sin\theta\tan\delta_0),$$

$$\cos\delta\cos(a-a_0)=\cos\delta_0(\sin^2 a_0+\cos\theta\cos^2 a_0-\sin\theta\cos a_0\tan\delta_0),$$

因此 $$\tan(a-a_0)=\frac{(\cos a_0-\cos\theta\cos a_0+\sin\theta\tan\delta_0)\sin a_0}{\sin^2 a_0+\cos\theta\cos^2 a_0-\sin\theta\cos a_0\tan\delta_0}。$$

但是

$$\cos a_0-\cos\theta\cos a_0+\sin\theta\tan\delta_0=\cos a_0\,2\sin^2\frac{1}{2}\theta+\sin\theta\tan\delta_0=$$

$$=\sin\theta(\tan\delta_0+\tan\frac{1}{2}\theta\cos a_0)=p,$$

$$\sin^2 a_0+\cos\theta\cos^2 a_0-\sin\theta\cos a_0\tan\delta_0=$$

$$=\sin^2 a_0+\cos^2 a_0(1-2\sin^2\frac{1}{2}\theta)-\sin\theta\cos a_0\tan\delta_0=$$

$$=1-\cos a_0(2\sin^2\frac{1}{2}\theta\cos a_0+\sin\theta\tan\delta_0)=1-p\cos a_0。$$

因此 $$\tan(a-a_0)=\frac{p\sin a_0}{1-p\cos a_0},$$

p 的值可根據已知的 $\sin\theta$，$\tan\frac{1}{2}\theta$，δ_0 和 $a_0=\alpha_0+\zeta_0$ 的值而算出，因

此，也就可以算出$(a-a_0)$。於是$a=a_0+(a-a_0)$和$\alpha=a+z$。

赤緯δ最好是根據納比爾公式（參閱§9之末）而算出：

$$\tan\frac{1}{2}(\delta-\delta_0)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+a_0)}{\cos\frac{1}{2}(a-a_0)}\tan\frac{1}{2}\theta\text{。}$$

假若相反地要根據曆元t的α和δ而計算曆元的α_0和δ_0，那末由同一個三角形P_0PS中初始的方程式將是：

$$\cos\delta_0\sin\alpha_0=\cos\delta\sin\alpha,$$

$$\cos\delta_0\cos\alpha_0=\cos\theta\cos\delta\cos a+\sin\theta\sin\delta,$$

$$\sin\delta_0=-\sin\theta\cos\delta\cos a+\cos\theta\sin\delta\text{。}$$

它們與初始方程式(112)不同的地方是以

$$a_0=\alpha_0+\zeta_0;\ a=\alpha-z;\ -z;\ -\zeta_0;\ -\theta;\ \delta,$$

代替了

$$a=\alpha-z;\ a_0=\alpha_0+\zeta_0,\ \zeta_0;\ z;\ \theta;\ \delta_0\text{。}$$

以後的公式對應地改變。

但化至另一個春分點時必須考慮到在$t-t_0$的時間中在α和δ方面恆星的自行。這是這樣作的。首先考慮到自行，得到

$$\alpha_0+\mu_\alpha(t-t_0)\text{ 和 }\delta_0+\mu_\delta(t-t_0);$$

這是恆星在時刻t的坐標，但它們是以t_0的春分點爲參考的。進而計算歲差，根據上述方法，得：

對於由t_0化至t

$$a_0=\alpha_0+\mu_\alpha(t-t_0)+\zeta_0,$$

$$d_0=\delta_0+\mu_\delta(t-t_0),$$

$$p=\sin\theta\left(\tan d_0+\tan\frac{1}{2}\theta\cos a_0\right),$$

$$\tan(a-a_0)=\frac{p\sin a_0}{1-p\cos a_0},$$

$$\alpha=a_0+(a-a_0)+z,$$

$$\tan\frac{1}{2}(\delta-d_0)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+a_0)}{\cos\frac{1}{2}(a-a_0)}\tan\frac{1}{2}\theta,$$

$$\delta=d_0+(\delta-d_0),$$

對於由t化至t_0

$$a=\alpha+\mu_\alpha(t_0-t)-z,$$

$$d=\delta+\mu_\delta(t_0-t),$$

$$p=-\sin\theta\left(\tan d-\tan\frac{1}{2}\theta\cos a\right),$$

$$\tan(a_0-a)=\frac{p\sin a}{1-p\cos a},$$

$$\alpha_0=a+(a_0-a)-\zeta_0,$$

$$\tan\frac{1}{2}(\delta_0-d)=-\frac{\cos\frac{1}{2}(a_0+a)}{\cos\frac{1}{2}(a_0-a)}\tan\frac{1}{2}\theta,$$

$$\delta_0=d+(\delta_0-d)\text{。}$$

根據準確公式的計算

25μ	$+.275$		-0.05	$-50\mu-.550$	$+.10$
	$2^h23^m3^s.148$	d_0	$81°12'6''.25$	$2^h23^m2^s.323$	$81°12'6''.40$
	$33°45'47''.22$	$\tan d_0$	0.810293	35 45 34.845	0.810295
ζ_0	+9 36.08		+66	−19 11.85	−133
a_0	35 55 23.30	$\log p/\sin\theta$	0.810359	35 26 22.795	0.810162
$\log\cos a_0$	9.908380	$\log\sin\theta$	7.385535	9.911012	7.686632 n
$\log\tan\frac{1}{2}\theta$	7.084506	$\log p$	8.195894	7.385695 n	8.496794 n
$\log\cos a_0\tan\frac{1}{2}\theta$	6.992886	$\log\sin a_0$	9.768414	7.296817 n	9.763312
		$\log p\cos a_0$	8.104274		8.407806 n
$\frac{1}{2}(a+a_0)$	$30°11'25.464$	$\log(1-p\cos a_0)$	9.994443	$34°55'52''.64$	0.010067
$\frac{1}{2}(a-a_0)$	0 16 2.164	$\log p\sin a_0$	7.964310	−0 30 30 .16	8.260106 n
		$\log\tan(a-a_0)$	7.969867		8.249139 n
$\log\cos\frac{1}{2}(a+a_0)$	9.996905	$a-a_0$	$0°32'4''.329$	9.913729	$-1°1'0''.313$
$\log\sec\frac{1}{2}(a+a_0)$	+5	a	36 27 27.629	+17	34 25 22.482
$\log\tan\frac{1}{2}(\delta-d_0)$	6.991416	z	9 36.13	7.299351 n	−19 11.85
$\frac{1}{2}(\delta-d_0)$	$0°\ 3'22''.228$	α	36 37 3.76	$-0°6'50''.94$	34 6 10.63
$\delta-d_0$	0 6 44 .456		$2^h26^m28^s.251$	−0 13 41.88	$2^h16^m24.709$
δ	$81°18'50$ .71			81 58 24.52	

$\zeta_0, z, \log\sin\theta, \log\tan\frac{1}{2}\theta$ 的値載於紐康的書中 (A Compendium of Spherical Astronomy)，星表 PGC 中，Peters, J. Präzessionstafeln 的表中(參考上面)，又每年都載於 American Ephemeris 中。

下面是根據級數和根據準確公式而計算歲差的例子。由 PGC № 562 取出的恆星 Piazzi 60 的坐標：

1900.0	var. an.	var. saec.	第3項	μ
α $2^h23^m2^s.873$	$+8^s.1296$	$+0^s.6767$	$+1^s.248$	$+0^s.0110$
δ $81°12'6''.30$	$+16''.265$	$-0''.699$	$-1''.90$	$-0''.002$

根據級數的計算

	化至 1925.0			化至 1850.0	
α_0	$2^h23^m2^s.873$	δ_0 $81°12'6''.30$	α_0	$2^h23^m2^s.873$	$81°12'6''.30$
v. an.	$+8.1296$	$+16.265$	v. an.	8.1296	16.265
$\frac{1}{8}$v. saec.	$+.846$	$-\ .087$	$-\frac{1}{4}$v. saec.	$-.1692$	$+\ .175$
	$+8.2142$	16.178		7.9604	16.440
$\times 25$	$+3^m25.355$	$6'44.45$	$\times -50$	$-6^m38.020$	$-13'42.00$
$\frac{1}{64}$第3項	$+.020$	-03	$\frac{1}{8}$第3項	-0.156	$+.24$
α	2 26 28.248	δ 81 18 50.72		2 16 24.697	80 58 24.54

章　　動

§92. 章動的基本概念、名詞和公式　上面已經講過，眞赤極以 18.6 年爲周期繞着平均極畫出了類似橢圓的波狀線，其中心位於平均極，而長軸的方向是沿着連接平均赤極和黃極的大圓弧。選取坐標軸(嚴格地說應爲球面坐標，但由於章動圖形的軸線是短的，可把軸線當作直線的，把整個圖形當作平面的)，使其中心位於平均極，$+y$ 軸沿着離開黃極的方向，$+x$ 軸則指向春分點。顯然，當眞極在 y 軸的正方向移動的時候，黃極與赤極之間的距離就增加着，也就是說黃赤交角 ε 就增大；當眞極由平均極向 y 軸的負方向移動的時候(也就是向着黃極移動的時候) ε 就減小；因此眞極沿 y 軸的移動稱爲交角的章動，以 $\Delta\varepsilon$ 表示。

相反地，眞極沿 x 軸的移動引起了眞春分點對於平春分點的移動；平赤極每年 n'' 的位移引起了在黃道上的日月歲差，其值等於 $n/\sin\varepsilon$（參考§86），與此類似地，眞極對於平極沿 x 軸的移動 $\pm x$ 引起了眞春分點對於平春分點的移動，其值爲 $\pm x/\sin\varepsilon$；因此 $x/\sin\varepsilon$ 稱爲黃經的章動；用符號 $\varDelta\psi$ 來表示；因此 $x=\varDelta\psi\sin\varepsilon$。眞春分點在赤道上對於平春分點的移動等於 $x/\tan\varepsilon$，稱爲赤經的章動，它等於 $\varDelta\psi\cos\varepsilon$。不難看出，無論是沿着黃道，或者是沿着赤道，眞春分點對於平春分點而言都作周期性的振動。

眞春分點對於平春分點而言的在黃道上的振動的振幅約爲 $\pm 18''$，在赤道上的約爲 $\pm 16''$。黃赤交角振動的振幅，$\varDelta\varepsilon$，約爲 $\pm 10''$。

在月球和太陽攝動影響的作用下地球繞軸自轉的理論，可用以引出對於 1900.0 的章動公式，載於第 241 和 242 頁上。它們包含那些在天文學的計算裏應用到的項。

符號：

$\varDelta\psi$—黃經章動的長周期項，

$d\psi$—黃經章動的短周期項，

$\varDelta\varepsilon$—交角章動的長周期項，

$d\varepsilon$—交角章動的短周期項，

Ω—月球軌道升交點的平黃經，

L—太陽的平黃經，

Γ—太陽的近地點的平黃經，

☽—月球的平黃經，

Γ'—月球軌道近地點的平黃經，

T—由 1900.0 起的時間，以回歸世紀計算。

量 A 和 f，A' 和 f' 的意義將在以後解釋（§97，99）。

從實際考慮（參考§99），載於本表中的各量如上所述，可以分成兩部份，一爲長周期項之和，另一爲短周期項之和。長周期項之和以符號 $\varDelta\psi$ 和 $\varDelta\varepsilon$ 表示，短周期項之和以符號 $d\psi$ 和 $d\varepsilon$ 表示。前者決定於月球軌道在黃道上的升交點的黃經和太陽的黃經，後者決定於月球的黃經。

但在本書的所有理論公式中（§99 除外）符號 $\varDelta\psi$ 和 $\varDelta\varepsilon$ 表示所有的長周期項和短周期項之和。

$$\Delta\psi\sin\varepsilon=(-6''.857-0''.007\ T)\sin\Omega+0''.083\sin 2\Omega-0''.506\sin 2L-0''.081\sin 2☽\cdots\cdots$$

$$\Delta\varepsilon=(+9''.210-0.001\ T)\cos\Omega-0''.090\cos 2\Omega+0''.551\cos 2L+0''.088\cos 2☽\cdots\cdots$$

周　期	宗　數	x $\Delta\psi\sin\varepsilon$ sin	y $\Delta\varepsilon$ cos	$\Delta\psi$ sin	A τ sin	f $m^s\tau$ sin
18.6 年	Ω	$-6''.857$	$+9''.210$	$-17''.234$	-0.31214	$-1^s.0540$
		$-\ 0.007\ T$	$-\ 0.001\ T$	$-\ 0.017\ T$	$-0.00031\ T$	$-\ 0.0010\ T$
9.3 年	2Ω	$+\ 0.083$	$-\ 0.090$	$+\ 0.209$	$+0.00115$	$+\ 0.0128$
0.5 年	$2L$	$-\ 0.506$	$+\ 0.551$	$-\ 1.272$	-0.02525	$-\ 0.0778$
1.0 年	$L-\Gamma$	$+\ 0.050$		$+\ 0.126$	$+0.00250$	$+\ 0.0077$
0.3 年	$3L-\Gamma$	$-\ 0.020$	$+\ 0.022$	$-\ 0.050$	-0.00099	$-\ 0.0031$
1.0 年	$L+\Gamma$	$+\ 0.008$	$-\ 0.009$	$+\ 0.021$	$+0.00042$	$+\ 0.0013$
0.5 年	$2L-\Omega$	$+\ 0.005$	$-\ 0.007$	$+\ 0.012$	$+0.00024$	$+\ 0.0007$
3.6 年	$2\Gamma''-\Omega$	$+\ 0.002$	$-\ 0.003$	$+\ 0.005$	$+0.00010$	$+\ 0.0003$
0.6 年	$2L-2\Gamma'$	$+\ 0.002$		$+\ 0.004$	$+0.00008$	$+\ 0.0002$

周期	宗數	$d\psi \sin \varepsilon$ sin	$d\varepsilon$ cos	$d\psi$ sin	A' sin	f' sin
14日	$2☽$	$-0''.081$	$+0''.088$	$-0''.204$	-0.00405	$-0''.0124$
28日	$☽-\Gamma'$	$+0.027$		$+0.068$	$+0.00135$	$+0.0041$
14日	$2(☽-\Gamma')$	$+0.001$		$+0.003$	$+0.00006$	$+0.0002$
14日	$2☽-\Omega$	-0.014	$+0.018$	-0.034	-0.00068	-0.0021
9日	$3☽-\Gamma'$	-0.010	$+0.011$	-0.026	-0.00052	-0.0016
32日	$☽-2L+\Gamma'$	$+0.006$		$+0.015$	$+0.00030$	$+0.0009$
27日	$☽+\Gamma'$	$+0.004$	-0.005	$+0.011$	$+0.00023$	$+0.0007$
15日	$2(☽-L)$	$+0.002$		$+0.006$	$+0.00012$	$+0.0004$
28日	$☽-\Gamma'+\Omega$	$+0.002$	-0.003	$+0.006$	$+0.00012$	$+0.0004$
27日	$☽-\Gamma'-\Omega$	$+0.002$	$+0.003$	$+0.006$	$+0.00012$	$+0.0004$
10日	$3☽-2L+\Gamma'$	-0.002	$+0.002$	-0.005	-0.00010	-0.0003
9日	$3☽-\Gamma'-\Omega$	-0.002	$+0.002$	-0.004	-0.00008	-0.0002

這些公式，正如歲差中對於量 n 的公式一樣，是在天體力學裏推導出的。在第十三章中將給出各主要項的初級推導。由此推導可以看出，在歲差和章動的式子中所有的項的係數只決定於某兩個量，而且，假若由觀測只確定 y 式中 $\cos\Omega$ 的係數以及歲差公式中的量 n，那末，知道了它們就可以計算出所有其他的係數。

至於怎樣結合理論與觀測而得到係數的數值，可以參考第十二章；Ω, L, ☽, Γ 和 Γ' 均勻地隨着時間而變化；有特製的表以便於計算它們。

因此眞極離開平均極的距離不超過 $10''$（沿圖形的長軸），也不少於 $6''$（沿短軸）。若由外面看天球，這種運動的方向是順時針的。圖 64 表示由 1940 年至 1950 年平均極（虛線）和眞極（實線）的運動。章動的項，除了兩個主要項以外，都已經擱在實線的寬度之內了。點表示每年年初極的位置。平均極每年移動 $20''.0$。平均極路徑的曲率在這時間中在圖上是看不出的；黃極位於圖的上面 36 米的地方。

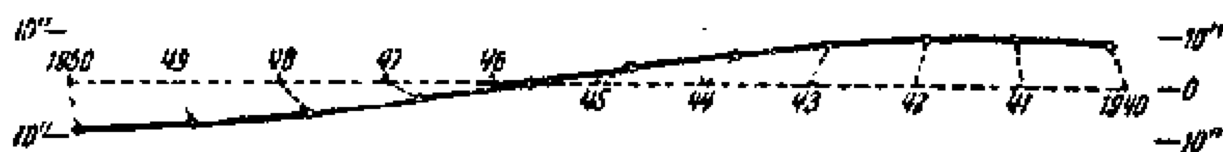


圖 64.

§93. **章動對於恆星的赤經和赤緯的影響** 假設，在給定的時刻眞極 P 對於平均極 P_0 的坐標爲 x 和 y。章動對於 α 和 δ 的影響的公式的推導和歲差公式的推導類似（參考 §88）。我們將由 δ 着手，因爲這比較簡單。

圖 65 中，恆星 S 的平均極距爲 P_0S，眞極距爲 PS，P_0S 與 $+x$ 軸的交角爲 α_0，而 P_0S 與 $+y$ 的交角爲 $90°-\alpha_0$。因此

$$P_0S-PS=(90°-\delta_0)-(90°-\delta)=\delta-\delta_0=x\cos\alpha_0+y\sin\alpha_0,$$

準確到一級無窮小量，把 $\frac{x}{P_0S}$ 和 $\frac{y}{P_0S}$ 當作這樣的量，也就是說恆星不十分靠近極；在 $\delta-\delta_0$ 的式中把 x 和 y 以 $\Delta\psi$ 和 $\Delta\varepsilon$ 表示的值代入，得：

$$\delta-\delta_0=\Delta\psi\sin\varepsilon\cos\alpha_0+\Delta\varepsilon\sin\alpha_0\text{。}\tag{113}$$

如果 S 位於任意象限，而非如圖中那樣地位於第一象限，對於這種情形也容易驗證這個公式的正確性。

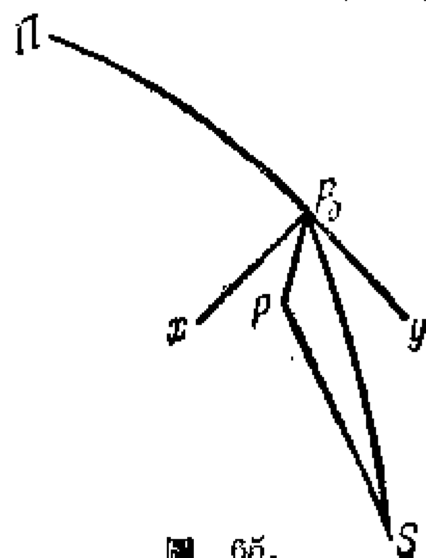


圖 65.

恆星 S 的眞赤經和平赤經之差 $\alpha-\alpha_0$，由三部份組成。眞極沿 x 軸的位移引起了：（1）春分點沿赤道的位移 $x\cot\varepsilon$（如同在歲差的情形下的位移 $\tau n\cot\varepsilon$ 一樣）：由此所有恆星的赤經增加了一個代數值 $x\cot\varepsilon$；和（2）赤經圈方向的變化，因此就有 α 的變化，其變化量爲 $x\sin\alpha_0\tan\delta_0$（也和歲差的情形一樣，仍然依照同樣的幾何考慮，相當於歲差裏的量 $\tau n\sin\alpha\tan\delta$，參考 $\frac{d\alpha}{dt}$ 的推導）；極沿 y 軸的位移所引起的不是春分點的移動，而只是交角 ε 的變化，但它引起了（3）赤經圈位置的改變；把在本質上和歲差情形相同的討論重覆一下，即可得到 α 的這種（第三種）變化的值：

$$-y\sin(90^\circ-\alpha_0)\tan\delta_0=-y\cos\alpha_0\tan\delta_0\text{。}$$

把 $(\alpha-\alpha_0)$ 的這三部份合在一起，即得下式：

$$\begin{aligned}\alpha-\alpha_0&=x\cot\varepsilon+x\sin\alpha_0\tan\delta_0-y\cos\alpha_0\tan\delta_0=\\&=\Delta\psi\sin\varepsilon\cot\varepsilon+\Delta\psi\sin\varepsilon\sin\alpha_0\tan\delta_0-\Delta\varepsilon\cos\alpha_0\tan\delta_0=\\&=\Delta\psi(\cos\varepsilon+\sin\varepsilon\sin\alpha_0\tan\delta_0)-\Delta\varepsilon\cos\alpha_0\tan\delta_0\text{。}\end{aligned}\tag{114}$$

α 和 δ 的歲差公式和章動公式的推導在表面上是相同的，但應當指出其間原則性的不同。在推導歲差的公式時我們所討論的極的移動是無限小的，因爲這是有限的速度，例如 n，與無限小的時間 τ 的乘積，因此公式 $\frac{d\alpha}{dt}$ 和 $\frac{d\delta}{dt}$ 是完全準確的；困難的只是它們對於很靠近極的恆星的實際應用，因爲對於這樣的恆星 α 和 δ 隨着時間改變得很快。在章動的情形下 x 和 y 不是無限小的量，只當和 $90^\circ-\delta$ 相比時它們才是小

的，假若恆星不十分靠近極。因此所推出的章動公式不是完全準確的：它們只準確到第一級的量 $\frac{x}{90^\circ-\delta}$ 和 $\frac{y}{90^\circ-\delta}$，而當恆星愈靠近極時它們就愈不準確。由於這些原因，對於近極的恆星，歲差和章動的計算就必須根據另外的（與所推出者不同）公式去進行；我們將在§97之末比較詳細地討論這個問題。

第十一章　光行差,歲差和章動公式的實際應用

前兩章所推出的光行差,歲差和章動對天體坐標的影響的公式,常在下述情形中用到,當必須由觀測到的,對於觀測時坐標系位置而言的天體視坐標,要求出其眞坐標,卽對於另外某一個坐標系位置而言的幾何坐標(簡單地說:對於另一春分點而言),而一般地說應當需要,例如在理論研究時,把天體在不同時刻的坐標化到同一坐標系的坐標。

這些公式在編製恆星位置表時要用到,我們就在本章討論這個問題。

然而,我們首先補充一下第五章所講的關於時間的測量。

§94. 恆星時和平太陽時的準確概念　如在第五章中所說的,恆星時爲春分點的時角;但現在我們知道,春分點在移動:(1)由於歲差,它永遠向同一方向移動,其速度在一百年內只有微小變化,(2)由於章動,其速度又在變化,分爲:(甲)長周期項,與月球升交點黃經和太陽黃經有關,及(乙)短周期項,與月球運動有關。因此,春分點有三個:(1)平春分點,只隨歲差而移動(與北天極相似),(2)眞春分點,隨歲差及完全隨章動而移動,(3)似眞春分點,隨歲差和章動長期項而移動,和它們相對應的有三種恆星時:(1)平恆星時,(2)眞恆星時和(3)似眞恆星時。

恆星時和平太陽時的關係,因引入了平赤道太陽而得以建立。根據紐康的定義,"平赤道太陽爲天球上的一個點,在赤道面中對恆星而言作均勻運動,其赤經與太陽平黃經相差得儘量少"。

太陽在恆星間的平均運動速率差不多是常數,因此若春分點在黃道上的速度 l 不變,則平黃道太陽的黃經變化準確地與時間成正比;故若春分點在赤道上的速度,卽 m 的值,爲常數,則平赤道太陽的赤經的增加與時間成正比。但事實上這不存在(參看 §87 的表)。

根據紐康的研究，太陽在恆星間的平均運動在1900年爲每儒略年$360°-22''.5680$，且每儒略世紀減少$0''.0403$。因此恆星年等於365.2563604平太陽日，每儒略世紀減少$0^s.0095$。

在1900年，根據紐康的研究（首先，參看§87末），每儒略年的黃經歲差l爲$50''.2493$。因此太陽黃經每儒略年增加$360°-22''.5680+$ $+50''.2493$，即$360°0'27''.6813$或$1296027''.6813$。但此值不是常數，因每儒略世紀，黃經歲差l增加$2''.218$，太陽運動速度減少$0''.040$，故此值每儒略世紀增加$2''.178$。

另外，太陽的平均幾何黃經在1900年1月0日格林尼治正午爲$279°41'48''.04$。減去紐康所採用的光行差$20''.50$得$279°41'27''.54$。因此所考慮的平黃道太陽的黃經可用下式表示：

$$279°41'27''.54+129602768''.13T+1''.089T^2, \tag{115}$$

其中T表示1900年1月0日格林尼治正午以後的儒略世紀數。

根據條件，赤道太陽的赤經與黃道太陽的平黃經相差應當儘量小；因此赤道太陽的赤經包含同樣的最初數目與變化速度，其中包括了春分點在赤道上的運動，即m的值。但m不是常數，每年增加$0''.0279$（參看§87末），即每儒略世紀增加$2''.79$。因此得到赤道太陽的赤經公式如下：

$$\left.\begin{array}{c} 279°41'27''.54+129602768''.13T+1''.395T^2 \\ \text{或}\quad 18^h38^m45^s.836+8640184^s.542T+0^s.093T^2. \end{array}\right\} \tag{116}$$

此公式表示平太陽時與平恆星時在某給定時刻T時的差，T的意義如上面所述。

一直到現在都根據此公式計算每格林尼治子夜的平恆星時，因赤經是由平春分點起算。若再加上赤經章動$\Delta\psi\cos\varepsilon$，則得眞恆星時，而若只加上章動的長周期項，則得似眞恆星時。

最後的那個公式可寫爲下列形式：

$$18^h38^m45^s.836+24^h0^m1^s.84542t+0^s.093T^2, \tag{117}$$

其中 t 爲 1900 年 1 月 0 日格林尼治正午以後的儒略年數。

在天文年曆中，對於每格林尼治子夜的恆星時，常常給出：(1)眞恆星時，(2)赤經章動長周期項及(3)赤經章動短周期項，所以由(1)減去(2)和(3)得平赤道太陽的均勻變化着的赤經(參看下表)。

由天文年曆取出的例子

1946	眞恆星時	差	赤經章動 長期項	赤經章動 短期項	平恆星時	差
1月 16	$7^h39^m18^s.087$		-0.990	$+0.002$	$7^h39^m19^s.075$	
		$3^m56.564$				$3^m56^s.556$
,, 17	43 14 .651		-0.988	8	43 15 .631	
		56.563				.555
,, 18	47 11 .214		-0.986	14	47 12 .186	
		56.559				.555
,, 19	51 07 .773		-0.984	16	51 8 .741	
		56.557				.556
,, 20	55 04 .330		-0.983	16	55 5 .297	
		56.554				.555
,, 21	7 59 00 .884		-0.981	13	7 59 1 .852	
		56.551				.555
,, 22	8 02 57 .435		-0.980	8	8 02 58 .407	
		56.551				.555
,, 23	8 06 53 .986		-0.978	+ 2	06 54 .962	

嚴格地講，應該永遠用眞恆星時，因我們所觀測的是天體對春分日而言，只被光行差所畸變的坐標，但眞恆星時變化得不均勻，使得眞恆星日的長度不是常數，雖然其變動範圍不超過 $\pm 0^s.020$，因此若不需要準確到千分之一秒，則常可取平太陽日長度爲 $24^h3^m56^s.555$ 恆星時。這個值就是本世紀初天文年曆中所採用的值。但近年來，由於製出了準確得很多的鐘，一方面也由於提高了觀測準確度，給出的是眞恆星時。爲了將恆星時間隔轉化到平太陽時間隔(或相反)並使其計算準確到 $0^s.001$，必須考慮子夜恆星時在一些平太陽日之後改變多少。

所推出的公式中可看出，由於有包含 T^2 的項，赤道太陽的赤經與黃道太陽的平黃經不可能達到完全相等。由 1900 年開始，它們的差根據公式 $0''.306\,T^2 = 0^s.0204\,T^2$ 而增加。目前它等於 $0^s.005$，2000 年後成爲 $0^s.020$。

在§36中說過："採用太陽視圓面中心的運動來確定真太陽時的長度"。現在，應該準確地說，所指的太陽視圓面中心應加上太陽視圓面中心的光行差位移。因此，更準確地說(正如有時候所作的)應當以"視太陽時"代替"真太陽時"。由前面可看出，光行差也進入了平赤道太陽赤經的數值公式。因爲光行差的引入，公式得到了視時差的意義。

這樣一來，

(1)太陽中心在天球上受光行差位移後的時角稱爲真太陽時；

(2)受光行差位移後的平赤道太陽中心，即赤經少 20″.50(如紐康表中所用的)的時角稱爲平太陽時。

§95. 由觀測確定恆星的赤經赤緯 爲要正確了解所推出的公式在此問題上的應用，必須明白由理想的無誤差的儀器觀測結果中，得出恆星視赤經和赤緯的方法，我們不討論用具有不可避免的誤差的眞實儀器進行觀測的技術，這是實用天文學的對象。因此，假定我們用適當裝置的儀器(實際上用所謂的子午儀)可以(1)測定天體中天時的無誤差的天頂距，且(2)知道此天體中天時天文鐘上的時刻，此鐘的針在一恆星日內準確地走 $24^h0^m0^s$，但它也有誤差，所給的不是準確的恆星時，而有某改正量 u。

恆星赤緯的測定 觀測者測量拱極星在上中天時的天頂距 ζ_B(在天頂之北)和下中天時的天頂距 ζ_H，改正大氣折射後得到眞天頂距 $z_B=\zeta_B+$ 大氣折射，$z_H=\zeta_H+$ 大氣折射。若當地的地理緯度記爲 φ，而恆星赤緯記爲 δ，則有關係：$z_B=\delta-\varphi$，$z_H=180°-\delta-\varphi$。

此時假定，在半個恆星日內，φ 和 δ 都沒有變化；實際上不是那樣；由於光行差 δ 的變化達 0″.2，但它可以考慮在內。由這些式子得到 $\varphi=90°-\frac{1}{2}(z_B+z_H)$ 及 $\delta=90°-\frac{1}{2}(z_H-z_B)$。知道了 φ 和測量了任何恆星在中天時的天頂距 ζ'(例如在天頂之南)就可求出 $\delta'=\varphi-(\zeta'+$ 大氣折射)。若要得到大的準確度，必須考慮地理緯度的變化。

恆星赤經的測定 用走得很準的鐘測定恆星 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 上中天

的時刻 $T_1, T_2, \cdots, T_n$，赤經記爲 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$。則可以計算它們的赤經差。實際上，若在觀測時，鐘的改正量 u 爲常數（鐘走得準確，但讀數不正確），則恆星時 $s_1 = T_1 + u$；$s_2 = T_2 + u$；…因此：$\alpha_1 = T_1 + u$；$\alpha_2 = T_2 + u$；$\cdots \alpha_n = T_n + u$；由此對於任意兩個恆星 S_i 和 S_k 得：$\alpha_i - \alpha_k = T_i - T_k$（$u$ 消去了）。

但由這些觀測還是不能定出 α 本身。爲此，必須觀測太陽中心在同日中午時的位置，卽測定太陽的赤緯 $\delta_\odot$ 和上中天時天文鐘上的時刻 $T'_\odot$。則由圖 19（第 78 頁）得：$\tan\delta_\odot = \sin\alpha_\odot \tan\varepsilon$，其中忽略了太陽很小的黃緯（也可以根據 §30 末的公式考慮，但我們不停留在此細節上）。ε 的數值可由測量太陽中心在夏至日（或夏至日附近）時的赤緯定出，因夏至日時 $\delta_\odot = \varepsilon$。這表示，由最後的方程式根據已知的 $\delta_\odot$ 和 ε 值可計算出太陽中天時的赤經 $\alpha_\odot$。則由 $\alpha_\odot = T_\odot + u$ 可確定 $u = \alpha_\odot - T_\odot$，此後對任何在這些日子觀測的恆星 S_i，由方程式 $\alpha_i = T_i + u$ 可算出 α_i。此外，在任何時刻把改正量 u 加到時鐘的讀數，則可得到在此時的準確的地方恆星時。在實用上，應當考慮時鐘改正量 u 在一日內的變化，卽所謂時鐘的日差（參看本書作者所寫的，"實用天文學教程"）。

這樣一來，我們在一天內能觀測多少恆星，就可以測定多少恆星的坐標。當然，所得到的坐標實際上並不是絕對準確的，因沒有一個測量是絕對準確的。多次重覆這種測定則可達到大的準確度。

然而，若我們在一年內不同的日期或不同的年內得到某恆星的幾個坐標，則我們沒有根據去簡單地取它們的算術平均值。實際上，雖然我們每次測量天體對於觀測那一天（更準確地講，對於觀測時刻）的天極和春分點位置的視坐標，但周年光行差和歲差隨時在變化，並且天極的平位置也在移動；因此在取同一恆星坐標的算術平均值以前，必須改正光行差和歲差等對每一個坐標的影響，這樣，我們就得到了化到同一個天極平位置的平均（對於觀測時刻）坐標。通常首先化每個坐標到進行觀測的那一年年初的天極平位置，卽考慮從年初到觀測時刻光行差，章

動和歲差對坐標的影響。

坐標的這三種歸算：(1)周年光行差，(2)章動，(3)歲差，都是由年初到觀測時刻，組成了一個化視星視位置到年初平位置的公式；顯然，相反地，由平位置化到視位置(指年初的平位置)的逆歸算，所用的數值相同，只是記號相反。然而，此年初不是一月一日或一般曆書上的一月零日；而是所謂的白塞耳年歲首。

§96. 白塞耳年或假年(白塞耳就是這樣叫它的)，平回歸年的長度，即按紐康的測定，總是並且準確地是 365.2421988 平太陽日；從太陽平黃經中，減去光行差常數，即按紐康的計算減去 $20''.50$，結果平黃經等於 $280°0'0''$，就從這時起作爲白塞耳年的開始。

根據一般的規律，太陽由平春分點起算的平黃經用時分秒表示爲 $18^h40^m0^s.0$ 時，則平赤道太陽的赤經也等於這個角度。

根據紐康的研究，在 1900 年一月零日格林尼治平中午時太陽的幾何平黃經爲 $279°41'48''.04$；減去光行差 $20''.50$ 得 $279°41'27''.54$；化爲時分秒得 $18^h38^m45^s.836$，即 §94 中公式(116)開始的那個平太陽赤經的數值。到 $280°$ 或 $18^h40^m0^s$ 要差 $1^m14^s.164$；但平太陽在一回歸年(365.2422 平太陽日)內運動速率爲 $360° = 24^h$；所以 $74^s.164$ 化爲 $\frac{74.164}{24\times60\times60}\times365.2422=0.3135$ 平太陽日。這就是說 1900 年的白塞耳年歲首爲一月 0.3135 格林尼治平太陽時，或 1900 年一月 0.8135 格林尼治民用時或世界時。每年加上 365.242199 日，又考慮到閏年，不難得出每個曆年的白塞耳年歲首的表；由表抽出一段如下(1925 年以前用格林尼治平太陽時，從 1925 年起用世界時)：

	一月		一月		一月		一月		一月
1900	0.3135	1904	1.2823	1924	1.1263	1940	1.5014	1944	1.4702
01	0.5557	05	0.5245	25	0.8685	41	0.7436	45	0.7124
02	0.7979	06	0.7667	26	1.1107	42	0.9858	46	0.9546
03	1.0401	07	1.0089	27	1.3529	43	1.2280	47	1.1968

白塞耳年中的日期，不用月數，而只用日數（或年的小數），由白塞耳年歲首算到所考慮的時刻。例如，設所給的時刻爲：1941 年 1 月 24 日 $14^h30^m.3$ 莫斯科地方時 = 1941 年 1 月 24 日 $12^h0^m.0$ 或 24.5000 世界時。白塞耳年開始於一月 0.7436 日；此後經過了 24.5000 − 0.7436 = = 23.7564 日 = 0.0650 年；因此，此時刻記爲 1941.0650 世界時。在天文年曆中，爲了這樣的計算，列出了很方便的表。

只有在白塞耳年中，時刻用年的小數表示，這成了一種定則。

使用白塞耳年的結果如下。任何白塞耳年的同一小數，不僅準確地對應於同一個太陽平黃經，而且近似地太陽眞黃經也相同（不算行星攝動），這在計算周年光行差時就用到；這樣，對於某恆星，在所有的年中，同一個白塞耳年時刻，光行差都相同；它只隨 α 和 δ 變化。在計算整數年的歲差時，白塞耳年的應用給了固定的時間單位；因此，春分點的運動速度（歲差理論中的 l, m, n 值）對於白塞耳年（回歸年）而言就是常數了。

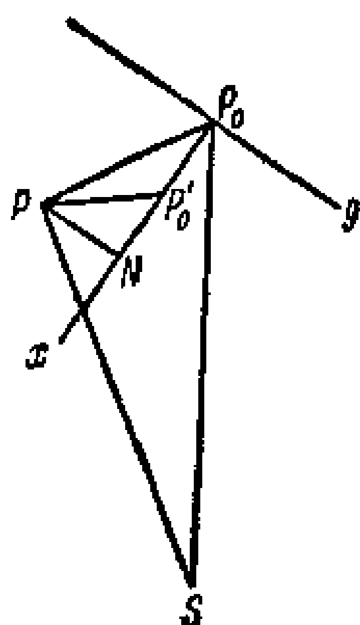


圖 66.

§97. 恆星在年初平位置歸算到給定時刻的眞位置 設在圖 66 中 P_0 爲白塞耳年年初天極的平位置。P'_0 爲年初以後所設時刻 τ（以年爲單位）的天極平位置，P 爲此時的天極眞位置，PN 垂直於 $P_0P'_0$；由於它們很小（P_0P 不超過 $28''$），圖可取爲平面圖形。恆星 S 對應於這些極的坐標記爲 α_0, δ_0；α'_0, δ'_0；α, δ。顯然 $P_0P'_0$ 爲平位置在 τ 時刻內的移動數量，即 $n\tau$；P'_0P 爲章動；$NP = -\Delta\varepsilon$；$P'_0N = = \Delta\psi \sin\varepsilon$。

根據歲差公式（106）和（107）得：

$$\alpha'_0 - \alpha_0 = \tau(m + n \sin\alpha_0 \tan\delta_0);$$

$$\delta'_0 - \delta_0 = \tau n \cos\alpha_0。$$

根據章動公式(113)和(114)得：

$$\alpha-\alpha_0'=(\cos\varepsilon+\sin\alpha_0\tan\delta_0\sin\varepsilon)\Delta\psi-\tan\delta_0\cos\alpha_0\Delta\varepsilon,$$

$$\delta-\delta_0'=\cos\alpha_0\sin\varepsilon\Delta\psi+\sin\alpha_0\Delta\varepsilon,$$

在右端把 α_0'，δ_0' 換爲 α_0，δ_0，這樣做只引起第二級的小誤差。

把這兩個差相加卽得 τ 時的眞坐標和年初平坐標的差：

$$\alpha-\alpha_0=\tau(m+n\sin\alpha_0\tan\delta_0)+\Delta\psi\sin\varepsilon\sin\alpha_0\tan\delta_0+$$
$$+\Delta\psi\cos\varepsilon-\Delta\varepsilon\cos\alpha_0\tan\delta_0=$$
$$=\left(\tau+\frac{\Delta\psi}{n}\sin\varepsilon\right)(m+n\sin\alpha_0\tan\delta_0)-$$
$$-\Delta\varepsilon\cos\alpha_0\tan\delta_0+\Delta\psi\cos\varepsilon-\Delta\psi\frac{m}{n}\sin\varepsilon,$$

$$\delta-\delta_0=\left(\tau+\frac{\Delta\psi}{n}\sin\varepsilon\right)n\cos\alpha_0+\Delta\varepsilon\sin\alpha_0。$$

引入符號：

$$\left.\begin{aligned}&A=\tau+\frac{\Delta\psi}{n}\sin\varepsilon=\tau+\frac{\Delta\psi}{p};\quad B=-\Delta\varepsilon;\\&E=\Delta\psi\left(\cos\varepsilon-\frac{m}{n}\sin\varepsilon\right);\ a_0=m+n\sin\alpha_0\tan\delta_0;\\&b_0=\cos\alpha_0\tan\delta_0;\ a_0'=n\cos\alpha_0;\ b_0'=-\sin\alpha_0。\end{aligned}\right\}\tag{118}$$

把自行計算進去就得到：

$$\left.\begin{aligned}\alpha-\alpha_0&=Aa_0+Bb_0+E+\mu_\alpha\tau,\\\delta-\delta_0&=Aa_0'+Bb_0'+\mu_\delta\tau。\end{aligned}\right\}\tag{119}$$

注意，A，B，E 與常量以及太陽黃經，月球黃經，和 Ω 有關，而 a_0，b_0，a_0'，b_0' 僅與常量及恆星坐標 α_0，δ_0 有關。因 $\frac{m}{n}$ 與 $\cot\varepsilon$ 相差很少，故 E 非常小；因此常不考慮 E 的影響。

可以表示 $\alpha-\alpha_0$ 和 $\delta-\delta_0$ 爲另一形式：

$$\alpha-\alpha_0=m\tau+\Delta\psi\cos\varepsilon+(n\tau+\Delta\psi\sin\varepsilon)\sin\alpha_0\tan\delta_0-$$
$$-\Delta\varepsilon\cos\alpha_0\tan\delta_0,$$

$$\delta-\delta_0=(n\tau+\Delta\psi\sin\varepsilon)\cos\alpha_0+\Delta\varepsilon\sin\alpha_0,$$

引入量 f, g, G:

$$\left.\begin{aligned}f&=m\tau+\Delta\psi\cos\varepsilon=mA+E,\\g\sin G&=-\Delta\varepsilon=B,\\g\cos G&=n\tau+\Delta\psi\sin\varepsilon=nA\text{。}\end{aligned}\right\}\tag{120}$$

則得:

$$\left.\begin{aligned}\alpha-\alpha_0&=f+g\sin(G+\alpha_0)\tan\delta_0+\mu_\alpha\tau,\\\delta-\delta_0&=g\cos(G+\alpha_0)+\mu_\delta\tau\text{。}\end{aligned}\right\}\tag{121}$$

容易看出 f, g, G 的簡單的幾何意義,並得到本公式的有益的獨立結論。在圖 66 中,P_0P 爲 g; 角 $P_0'P_0P$ 由 P_0P_0' 起順時針量(由外面看天球)爲 G; 角 SP_0P_0' 爲 α_0; f 爲春分點由於歲差 $m\tau$ 及章動 $\Delta\psi\cos\varepsilon$ 而在赤道上的位移。考慮狹球面三角形 PSP_0,取第一次近似值(參看§13),記小角度 PSP_0 爲 S 則得:

$$SP_0-SP=(\delta-\delta_0)_1=g\cos(G+\alpha_0),$$

$$S_1=\frac{g\sin(G+\alpha_0)}{\cos\delta_0}\text{。}$$

因此赤經圈和天赤道的交點在天赤道上的位移等於 $g\sin(G+\alpha_0)\tan\delta_0$,故 α_0 的總變化爲

$$(\alpha-\alpha_0)_1=f+g\sin(G+\alpha_0)\tan\delta_0\text{。}$$

我們得到了前面所推的公式,並且顯然看出這些公式爲第一次近似,因此用下標 1 註明。按 §13 公式(23)和(24)得第二次近似公式如下:

$$\begin{aligned}(\delta-\delta_0)_2&=(\delta-\delta_0)_1-\frac{1}{2}S_1^2\sin\delta_0\cos\delta_0=\\&=(\delta-\delta_0)_1-\frac{1}{2}\left[\frac{g\sin(G+\alpha_0)}{\cos\delta_0}\right]^2\sin\delta_0\cos\delta_0=\\&=(\delta-\delta_0)_1-\frac{1}{2}[g\sin(G+\alpha_0)\tan\delta_0]^2\cot\delta_0=\\&=(Aa_0'+Bb_0')-\frac{1}{2}(Aa_0+Bb_0-f)^2\cot\delta_0,\end{aligned}\tag{122}$$

$$S_2=S_1+S_1(\delta-\delta_0)_1\tan\delta_0=\frac{g\sin(G+\alpha_0)}{\cos\delta_0}+$$

$$+\frac{g\sin(G+\alpha_0)}{\cos\delta_0}g\cos(G+\alpha_0)\tan\delta_0,$$

$$(\alpha-\alpha_0)_2=f+S_2\sin\delta_0=f+g\sin(G+\alpha_0)\tan\delta_0+$$

$$+g\sin(G+\alpha_0)\tan\delta_0\times g\cos(G+\alpha_0)\tan\delta_0=$$

$$=Aa_0+Bb_0+E+(Aa_0+Bb_0-f)(Aa_0'+Bb_0')\tan\delta_0\text{。}\qquad(123)$$

應將恆星自行 $+\mu_\alpha\tau$ 和 $+\mu_\delta\tau$ 加在這個上面。

§98. 由恆星在年初的平位置歸算到它的視位置　爲要達到此目的，必須加上周年光行差的影響和歲差章動的影響。局限於第一級的準確度，到第一級的小量，我們可以在光行差公式中換 α, δ 爲 α_0, δ_0。則[參看§78，公式(96)和(97)]

$$c_0=\cos\alpha_0\sec\delta_0;\ d_0=\sin\alpha_0\sec\delta_0;$$

$$c_0'=\tan\varepsilon\cos\delta_0-\sin\alpha_0\sin\delta_0;\ d_0'=\cos\alpha_0\sin\delta_0,$$

$$\alpha'-\alpha=Cc_0+Dd_0;\ \delta'-\delta=Cc_0'+Dd_0',$$

把這些式子及到第一級準確度的量 $(\alpha-\alpha_0)$ 及 $(\delta-\delta_0)$ 相加起來，就得到所求的歸算的普用形式：

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha'-\alpha_0)_1=Aa_0+Bb_0+Cc_0+Dd_0+E,\\ (\delta'-\delta_0)_1=Aa_0'+Bb_0'+Cc_0'+Dd_0'\text{。}\\ \text{再加上 }+\mu_\alpha\tau\text{ 和 }+\mu_\delta\tau\text{。}\end{array}\right\}\qquad(124)$$

這個公式是白塞耳給出的，因此稱爲白塞耳公式，而 A, B, C, D, E, a, b, c, d, a', b', c', d' 叫做白塞耳星數。

用另外的，三角函數的形式，我們得[參看公式(98)和(121)]：

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha'-\alpha_0)_1=f+g\sin(G+\alpha_0)\tan\delta_0+h\sin(H+\alpha_0)\sec\delta_0,\\ (\delta'-\delta_0)_1=g\cos(G+\alpha_0)+h\cos(H+\alpha_0)\sin\delta_0+i\cos\delta_0\text{。}\\ \quad\text{加上 }+\mu_\alpha\tau\text{ 和 }+\mu_\delta\tau\text{。}\end{array}\right\}\qquad(125)$$

爲要得到第二次近似公式必須加上光行差的第二次近似公式(99, §78)

$$\left.\begin{aligned}(\alpha'-\alpha)_2&=(Cc+Dd)+(Cc+Dd)(Cc'+Dd')\tan\delta,\\(\delta'-\delta)_2&=Cc'+Dd'-\frac{1}{4}(Cc+Dd)^2\sin\delta\end{aligned}\right\}\qquad(126)$$

及歲差章動公式(123)和(122)。

然而，如對於歲差和章動公式那樣，在光行差公式中，換 c, d, c', d' 爲 c_0, d_0, c'_0, d'_0 要方便些，後者和 α_0, δ_0 有關，而和 α, δ 無關。要達此目的可以這樣考慮。量 $(\alpha'-\alpha)_1\cos\delta$ 和 $(\delta'-\delta)_1$ 爲光行差向量 SS' 在赤經圈及其垂線上的投影。這些投影，我們可以用下述方法得到：把向量 SS' 在大圓 P_0S 及其垂線上的投影，投射於這些方向上，就得：

$$(\alpha'-\alpha)_1\cos\delta=(\alpha'-\alpha_0)_1\cos\delta_0\cos S+(\delta'-\delta_0)\sin S,$$
$$(\delta'-\delta)_1=(\delta'-\delta_0)_1\cos S-(\alpha'-\alpha_0)\cos\delta_0\sin S。$$

由於 S 很小，只保留它的第一級和第二級的項，可以取 $\cos S=1$ 和

$$\sin S=g\sin(G+\alpha_0)\sec\delta_0,$$

則

$$\left.\begin{aligned}(\alpha'-\alpha)_1\cos\delta&=(Cc_0+Dd_0)\cos\delta_0+\\&\quad+(Cc'_0+Dd'_0)g\sin(G+\alpha_0)\sec\delta_0,\\(\delta'-\delta)_1&=(Cc'_0+Dd'_0)-(Cc_0+Dd_0)\times\\&\quad\times\cos\delta_0\,g\sin(G+\alpha_0)\sec\delta_0。\end{aligned}\right\}\qquad(127)$$

在以 $\cos\delta$ 除上面等式的第一式時，必須考慮到

$$\frac{\cos\delta_0}{\cos\delta}=\frac{\cos[\delta-(\delta-\delta_0)]}{\cos\delta}=1+\frac{(\delta-\delta_0)\sin\delta}{\cos\delta}=$$
$$=1+(Aa'_0+Bb'_0)\tan\delta=1+(Aa'_0+Bb'_0)\tan\delta_0。$$

因此

$$(\alpha'-\alpha)_1=(Cc_0+Dd_0)+(Cc_0+Dd_0)(Aa'_0+Bb'_0)\tan\delta_0+$$
$$+(Cc'_0+Dd'_0)g\sin(G+\alpha_0)\sec^2\delta_0。\qquad(128)$$

這些就是所求的 $(\alpha'-\alpha)_1$ 和 $(\delta'-\delta)_1$ 表爲 α_0 和 δ_0 的式子。

在(126)中的第二級小量的項裏，可以簡單地換 c, d, δ 爲 c_0, d_0, δ_0，因爲由此僅出現第三級小量。

這樣，光行差的第二級準確度的式子化成下面形式：

$$
\begin{aligned}
(\alpha'-\alpha)_2 = & Cc_0+Dd_0+(Cc_0+Dd_0)(Aa_0'+Bb_0')\tan\delta_0+\\
& +(Cc_0+Dd_0)(Cc_0'+Dd_0')\tan\delta_0+\\
& +(Cc_0'+Dd_0')g\sin(G+\alpha_0)\sec^2\delta_0=\\
= & Cc_0+Dd_0+(Cc_0+Dd_0)(Aa_0'+Bb_0'+Cc_0'+Dd_0')\times\\
& \times\tan\delta_0+\frac{(Cc_0'+Dd_0')(Aa_0+Bb_0-f)}{\sin\delta_0\cos\delta_0},
\end{aligned}
\tag{129}
$$

$$
\begin{aligned}
(\delta'-\delta)_2 = & Cc_0'+Dd_0'-(Cc_0+Dd_0)g\sin(G+\alpha_0)-\\
& -\frac{1}{4}(Cc_0+Dd_0)^2\sin 2\delta_0=\\
= & Cc_0'+Dd_0'-(Cc_0+Dd_0)(Aa_0+Bb_0-f)\cot\delta_0-\\
& -\frac{1}{2}(Cc_0+Dd_0)^2\sin\delta_0\cos\delta_0。
\end{aligned}
\tag{130}
$$

現在，可以在上節末 $(\alpha-\alpha_0)_2$ 和 $(\delta-\delta_0)_2$ 的式子中［公式(122)和(123)］，加上這些式子，但此時必須考慮到，只有距極很近的恆星，第二級小量才超過 $0''.01$，因 f 不到 $28''$，而 SS' 爲 $20''$（比較§13末）。就對於這些恆星，$\cot\delta_0$ 和 $\sin\delta_0\cos\delta_0$ 相差很少，而 $\tan\delta_0$ 和 $1/\sin\delta_0\cos\delta_0$ 也是這樣；例如，$\cot 80°=0.1763$，而 $\sin 80°\cos 80°=0.1710$；$\cot 85°=0.0875$，而 $\sin 85°\cos 85°=0.0868$；因此，可以取 $\sin\delta_0\cos\delta_0=\cot\delta_0$。則把(123)和(129)，(122)和(130)相加得：

$$
\left.
\begin{aligned}
(\alpha'-\alpha_0)_2 = & Aa_0+Bb_0+Cc_0+Dd_0+E+\\
& +(Aa_0+Bb_0+Cc_0+Dd_0-f)\times\\
& \times(Aa_0'+Bb_0'+Cc_0'+Dd_0')\tan\delta_0,\\
(\delta'-\delta_0)_2 = & Aa_0'+Bb_0'+Cc_0'+Dd_0'-\\
& -\frac{1}{2}(Aa_0+Bb_0+Cc_0+Dd_0-f)^2\cot\delta_0,
\end{aligned}
\right\}
\tag{131}
$$

或用(124)的符號：

$$
\left.
\begin{aligned}
(\alpha'-\alpha_0)_2 &= (\alpha'-\alpha_0)_1+[(\alpha'-\alpha_0)_1-f](\delta'-\delta_0)_1\tan\delta_0,\\
(\delta'-\delta_0)_2 &= (\delta'-\delta_0)_1-\frac{1}{2}[(\alpha'-\alpha_0)_1-f]^2\cot\delta_0。
\end{aligned}
\right\}
\tag{132}
$$

這些量中還要加上恆星自行 $+\mu_\alpha\tau$ 和 $+\mu_\delta\tau$。

公式中的量都是用弧度表示，若赤經差要用時秒表示，而赤緯差用角度秒表示，則上式成爲

$$\left.\begin{aligned}(\alpha'-\alpha_0)^s_2&=(\alpha'-\alpha_0)^s_1+[(\alpha'-\alpha_0)^s_1-f^s]\frac{(\delta'-\delta_0)''}{206265''}\tan\delta_0,\\(\delta'-\delta_0)''_2&=(\delta'-\delta_0)''_1-\frac{1}{2}[(\alpha'-\alpha_0)^s_1-f^s]^2\frac{225}{206265}\cot\delta_0。\end{aligned}\right\}(133)$$

拱極星的第二級準確的公式，首先在 1876 年由法布里秋斯（在普耳科夫）推出。然而，他的公式不準確；和公式(133)比較，他的公式不包含 f'。

§99. 係數的數値 上面的公式中，坐標差大多數用弧度表示。在實用上，赤經差必需用時秒表示，而赤緯差必需用角度秒。從實用來考慮，在天文年曆中，A, B, f, g, G 每一個量都分爲兩個和：長周期項的和及短周期項的和，長周期項的和記爲 A, B, f, g, G, 短周期項的和記爲 A', B', f', g', G'。這種分法在 §92 中指出過，載於 241 和 242 頁上的章動公式表中。

因此，以符號 $\Delta\psi$ 和 $\Delta\varepsilon$ 表示長周期項的和，而 $d\psi$ 和 $d\varepsilon$ 則表示短周期項的和。量 A', B', f', g', G' 用下列公式給予定義：

$$A'=\frac{d\psi}{n}\sin\varepsilon=\frac{d\psi}{p};\quad B'=-d\varepsilon;\quad f'=d\psi\cos\varepsilon=mA';$$

$$g'\sin G'=B'=-d\varepsilon;\quad g'\cos G'=nA'=d\psi\sin\varepsilon。$$

必須注意，在不同的曆書中，這些歸算量有不同形式。Астрономический Ежегодник 給了和數 $(A+A')$ 及 $(B+B')$ 及單獨的 A', B'。Nautical Almanac 給出單獨的 A, B 和 A', B'。American Ephemeris 中在 A, B 的符號下給出和數 $A+A'$ 及 $B+B'$。因此，在用曆書時，必須讀完它對這個問題的解釋，並且注意到這些量是對於一天裏的那一小時給出的。

在每隔十天給一次恆星視位置的星曆表中，恆星坐標不包含短周期項，以便可以採用內插法。假如需要，就對恆星也根據下面公式計算

每天的短周期項：

$$\left.\begin{aligned} d\alpha &= A'a_0 + B'b_0 = f' + g' \sin(G' + \alpha_0)\tan\delta_0, \\ d\delta &= A'a'_0 + B'b'_0 = g' \cos(G' + \alpha_0)。\end{aligned}\right\} \quad (134)$$

它們不到 $\pm 0^s.020 \pm 0^s.008 \tan\delta$ 和 $\pm 0''.13$。也可以用下列公式計算

$$\left.\begin{aligned} d\alpha &= d\psi(\cos\varepsilon + \sin\varepsilon \sin\alpha_0 \tan\delta_0) - d\varepsilon \cos\alpha_0 \tan\delta_0, \\ d\delta &= d\psi \sin\varepsilon \cos\alpha_0 + d\varepsilon \sin\alpha_0。\end{aligned}\right\} \quad (135)$$

由公式(114)和(113)容易得出這些公式，因爲(135)只是前者的一部份。爲了應用它們，需要每許多年計算一次對於被觀測的恆星 $d\psi$ 和 $d\varepsilon$ 的係數(參看§101)。

由於 ε 在變化，p, m, n, $\Delta\psi$, $\Delta\varepsilon$, A, B, E, f 的數值也隨時在變化。給出它們在 1950 年的值，及其每一百年的變化，T 認爲由 1950.0 起算的世紀數。

$$\varepsilon = 23°26'44''.84 - 46''.84T; \quad p = 50''.3733 + 0''.0050T;$$

$$m'' = 46''.0990 + 0''.0279T; \quad m^s = 3^s.07327 + 0^s.00186T;$$

$$n'' = 20''.0425 - 0''.0085T; \quad n^s = 1^s.33617 - 0^s.00057T。$$

爲了把$(\alpha' - \alpha_0)$表爲時秒，令：

$$a_0 = m^s + n^s \sin\alpha_0 \tan\delta_0 = 3^s.07327 + 0^s.00186T + \\ + (1^s.33617 - 0^s.00057T)\sin\alpha_0 \tan\delta_0。$$

$$b_0 = \frac{1}{15}\cos\alpha_0 \tan\delta_0; \quad c_0 = \frac{1}{15}\cos\alpha_0 \sec\delta_0;$$

$$d_0 = \frac{1}{15}\sin\alpha_0 \sec\delta_0。$$

對於赤緯：

$$a'_0 = (20''.0425 - 0''.0085T)\cos\alpha_0; \quad b'_0 = -\sin\alpha_0;$$

$$c'_0 = \tan\varepsilon \cos\delta_0 - \sin\alpha_0 \sin\delta_0; \quad d'_0 = \cos\alpha_0 \sin\delta_0。$$

量 B, C, D 用角度秒給出，E 以時秒，A 以時間單位(回歸年)給出。

量 $A=\tau+\frac{\Delta\psi}{n}\sin\varepsilon=\tau+\frac{\Delta\psi}{p}$，或者把 $\Delta\psi$ 和 p 中的數不看做角度秒，而看做不名數，

$$A=\tau+\frac{\Delta\psi}{50.3733+0.0050T}=\tau+\Delta\psi(0.0198518-0.0000020T);$$

$$A'=\frac{d\psi}{50.3733}=d\psi\times0.01985;\ B=-\Delta\varepsilon;\ B'=-d\varepsilon。$$

量 E 以角度秒表出等於

$$\Delta\psi''\left(\cos\varepsilon-\frac{m}{n}\sin\varepsilon\right)=\Delta\psi''\left(\cos\varepsilon-\frac{p\cos\varepsilon-\lambda'}{p}\right)=\Delta\psi''\frac{\lambda'}{p}=$$

$$=\frac{\text{行星歲差}}{\text{日月歲差}}\times\text{黃經章動}=\Delta\psi''\frac{11.53-1.90T}{5037.33}=$$

$$=\Delta\psi''(0.002288-0.000377T),$$

以時秒爲單位的 $E=\Delta\psi''(0.000152-0.000025T)$，

$$f=m\tau+\Delta\psi\cos\varepsilon=(46''.0990+0''.0279T)\tau+\Delta\psi''\cos\varepsilon=$$

$$=(3^s.07327+0^s.00186T)\tau+\frac{1}{15}\Delta\psi''\cos\varepsilon,$$

$$f'=d\psi\cos\varepsilon。$$

對於 1900.0 的 $\Delta\psi$, $d\psi$, $\Delta\varepsilon$, $d\varepsilon$, A, f, A', f' 的數值公式在 §92 中給出。對於主要項指出了它們每一百年的變化。

$$C=h\sin H=-20''.470\cos\varepsilon\cos\odot=$$

$$=-(18''.7799+0''.0019T)\cos\odot,$$

$$D=h\cos H=-20''.470\sin\odot;$$

$$i=C\tan\varepsilon=-(8''.1446-0''.0043T)\cos\odot。$$

量 g 和 h 都用角度秒表示。

這樣一來，在實用上應用帶着本節符號的下列公式，其中 α,δ 和前面不同，表示恆星的視坐標；α_0, δ_0 爲年初平坐標。

$$(\alpha-\alpha_0)_t=\tau\mu_\alpha+Aa_0+Bb_0+Cc_0+Dd_0+E(\text{時秒}),$$

$$(\delta-\delta_0)_t=\tau\mu_\delta+Aa'_0+Bb'_0+Cc'_0+Dd'_0(\text{角度秒}),$$

$$(\alpha-\alpha_0)_1=\tau\mu_\alpha+f^s+\frac{1}{15}g\sin(G+\alpha_0)\tan\delta_0+$$
$$+\frac{1}{15}h\sin(H+\alpha_0)\sec\delta_0(\text{時秒}),$$
$$(\delta-\delta_0)_1=\tau\mu_\delta+g\cos(G+\alpha_0)+h\cos(H+\alpha_0)\sin\delta_0+$$
$$+i\cos\delta_0(\text{角度秒})。$$

對於拱極星用第二級近似公式(133)。

假如需要，根據公式(134)或(135)計算章動的短周期項。

在表中給了獵戶座 α，天龍座 γ，雙魚座 ω 三個星的：（1）1947 年初的平位置；（2）α 和 δ 的年變 (var. annua)；（3）彼此相隔 30 個中天的 13 個格林尼治上中天時的平位置。練習題目如下(一切計算都準確到 $0''.1$ 和 $0^s.01$)：（1）由第二個開始，消除每個坐標的和時間成正比的變化；為此就要自第 n 個坐標中減去 $(n-1)\times\frac{\text{年變}}{366.24}\times30$ 這個數。這樣一來，每個坐標都歸算到第一天了；用 α 和 δ 表示這些歸算後的坐標；(2)組成差數 $\Delta\alpha=15(\alpha-\alpha_{\text{平}})\times\times\cos\delta$ 和 $\Delta\delta=\delta-\delta_{\text{平}}$。對於獵戶座 α 和雙魚座 ω 可以取 $\cos\delta=1-\frac{1}{150}$，而對於天龍座 γ 取 $\cos\delta=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$；（3）在 1 毫米或 5 毫米寬的方格紙上畫出坐標為 $\Delta\alpha$ 和 $\Delta\delta$ 的點。把 $\Delta\alpha$ 的正方向取為自右向左，$\Delta\delta$ 的正方向為自下向上。尺度取 $1''$ 為 $2.5\,mm$。在每一點標上它的號數 n，並用均勻曲線連結起來；(4)討論所得到的曲線：

(甲)它是什麼曲線？

(乙)為什麼三個圖的長軸都相同，並且都用角度秒表示時它們應是怎樣的？

(丙)為什麼圖的短軸不同？和長軸的關係怎樣？和什麼有關？

(丁)為什麼沿着 1, 2, 3, …, 13 各點走，有的是順時針，有的是反時針？

(戊)為什麼獵戶座 α 和天龍座 γ 星的圖上，1 和 13 點在長軸端點，而雙魚座 ω 的在短軸端點？

(己)為什麼年初平位置，即坐標原點，不在每個圖的中心？

(庚)為什麼獵戶座 α 和雙魚座 ω 圖形中心的坐標 $\Delta\alpha$ 相同，都等於 $-14''$，而 $\Delta\delta$ 則不同 ($+4''$ 和 $-6''$)，而對於天龍座 γ 星又完全不同 ($-3''$ 和 $-5''$)？

把這些坐標拿來和在圖 64 上 1947 年真極對平極而言的位置比較，又和恆星在天空上的位置比較。

§100. 恆星位置表　若在某一個白塞耳年內，得到了某恆星的 α 和 δ 的幾個值，則正如所說的，不能直接由它們求出算術平均數來當做未知量的或然值，因為每一個值有它自己的光行差，並且是對於觀測時

練　習

1947 年初的平位置	α 獵戶座 α 5ʰ52ᵐ 18ˢ.08	δ +7°23′ 56″.00		γ 天龍座 α 17ʰ.55ᵐ 22ˢ.40	δ +51°29′ 39″.8		ω 雙魚座 α 23ʰ56ᵐ 35ˢ.25	δ +6°31′ 11″.6
年　變	+3ˢ.249	+0″.68		+1ˢ.393	−0″.42		+3ˢ.081	+19″.93
1　I 0.9	18ˢ.41	57″.6	1　I 1.5	19ˢ.82	33″.4	1　I 1.7	34ˢ.03	6″.2
2　I 30.9	18 .42	55.6	2　31.4	20 .48	23.4	2　31.6	33 .75	3.9
3　III 1.8	18 .07	54.7	3　III 2.3	21 .55	17.0	3　III 2.6	33 .62	2.0
4　31.7	17 .56	54.8	4　IV 1.2	22 .76	16.1	4　IV 1.5	33 .78	1.8
5　IV 30.6	17 .17	55.8	5　V 1.1	23 .85	20.6	5　V 1.4	34 .28	3.9
6　V 30.6	17 .08	57.8	6　31.1	24 .60	29.0	6　31.3	35 .09	8.4
7　VI 29.5	17 .37	60.8	7　VI 29.9	24 .86	38.5	7　VI 30.2	36 .04	14.4
8　VII 29.4	17 .97	64.0	8　VII 29.9	24 .59	46.9	8　VII 30.1	36 .93	20.6
9　VIII 28.3	18 .77	66.6	9　VIII 28.8	23 .85	52.3	9　VIII 29.1	37 .56	25.6
10　IX 27.2	19 .66	67.7	10　IX 27.7	22 .86	53.6	10　IX 27.9	37 .86	28.8
11　X 27.2	20 .54	66.8	11　X 27.6	21 .90	50.3	11　X 27.9	37 .85	30.0
12　XI 26.1	21 .30	64.3	12　XI 26.6	21 .28	42.8	12　XI 26.8	37 .64	29.4
13　XII 25.9	21 .79	61.4	13　XII 26.5	21 .24	32.6	13　XII 26.7	37 .34	27.8

刻的天極和春分點的眞位置而言。首先應該去掉它們每一個的光行差影響，並歸算到白塞耳年年初的平春分點(即天極和春分點的平位置)。只有那些"年初平"坐標才能取算術平均數。然而嚴格地說，就是這樣還不能得到恆星的年初平位置，因爲我們還應該假定每個恆星都有自行。因此，若在時刻 $t_1, t_2, \cdots, t_n$(由年初起算)測定恆星坐標，並且化視位置爲年初平位置後得到的坐標爲 $\alpha_1, \delta_1, \alpha_2, \delta_2, \cdots, \alpha_n, \delta_n$，則它們的平均數，即 $\alpha_m=\frac{1}{n}(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)$ 和 $\delta_m=\frac{1}{n}(\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_n)$ 爲恆星在時刻 $t_m=\frac{1}{n}(t_1+t_2+\cdots+t_n)$ 時但對應於年初坐標系位置而言的坐標。

若在幾年內進行測量，則首先把測得的坐標用上面推出的公式(135)歸算到每一個進行觀測的年初坐標系，然後只考慮歲差影響，再把所得到的"平"坐標歸算到所選定的年初去，比如1915年，1925年等，只有對應於同一春分點的坐標才取其算術平均數；它表示恆星在進行觀測各時刻(在此情形中是在不同的年內) $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 的平均時刻時的位置，此平均時刻 $t_m=\frac{1}{n}(t_1+t_2+\cdots+t_n)$ 稱爲曆元。

將所有觀測過的恆星的測量出的位置列在一起，就得到一張表這就是恆星位置表；其中所有的坐標都是對同一個坐標系而言：所選定的年初平春分點，但每一恆星有它自己的曆元。

若在相隔幾十年或一兩百年的兩個時期得到了某恆星的 α 和 δ 的兩個測量值，在這段時間內做好幾次測量更好，則由此可計算此恆星的自行。假定，在曆元 t_1 在春分點 T_1 時的平均坐標爲 α_1 和 δ_1；在曆元 t_2 春分點 T_2 的爲 α_2, δ_2。用歲差公式把坐標 α_1, δ_1 歸算到 t_2 時的春分點，記爲 α_1' 和 δ_1'。即是說，它們和 α_2, δ_2 是對於相同的坐標系而言，即這些坐標和 α_2, δ_2 一樣是對於春分點 T_2 而言，但它們是在曆元 t_1 時測得，而 α_2, δ_2 在曆元 t_2 時測得。故它們的差 $\alpha_2-\alpha_1'$ 和 $\delta_2-\delta_1'$ 爲恆星由 t_1 到 t_2 的時間間隔內的自行。

因此

$$\mu_\alpha = \frac{\alpha_2 - \alpha_1'}{t_2 - t_1} \quad 和 \quad \mu_\delta = \frac{\delta_2 - \delta_1'}{t_2 - t_1}。$$

如果對此恆星的平坐標有好幾次的測定結果不只是兩次，則對於其中每一個有：春分點 T_i，曆元 t_i，坐標 α_i，δ_i；把它們歸算到任何一個，但是所算到的春分點始終是 T_0，這樣就得到 α_i'，δ_i'。用 α_0，δ_0 表示在曆元和春分點都是 T_0 的未知坐標；則

$$\alpha_0 = \alpha_i' + \mu_\alpha(T_0 - t_i), \quad \delta_0 = \delta_i' + \mu_\delta(T_0 - t_i)。$$

第一個方程包含兩個未知量 α_0 和 μ_α。有了好幾個這樣的方程，用最小二乘法求出 α_0 和 μ_α。對於赤緯亦同樣作。

當得到了好多由多次觀測確定坐標和自行的恆星，則它們就構成了所謂的基本星表。必須附加一句，這裏的簡單描述只是造表的基本原則，實際上的工作更複雜；更詳細的敍述請參看 И. Ф. 波拉克著的“恆星天文學引論”(Полак И. Ф., Введение в звёздную астрономию, ОНТИ, 1935) 和 С. Н. 勃拉日哥著的“實用天文學教程”(Блажко С. Н. Курс практической астрономии, Государственное издательство Технико-Теоретической литературы, 1940)。

必須注意，爲了準確地計算 μ_α 和 μ_δ，應該準確知道歸算公式中的係數，特別是歲差公式。顯然，譬如若係數 m 有誤差 dm，則在把春分點爲 T_i 的 α_i 歸算到春分點 T_0 時，這個誤差乘上 $(T_0 - t_i)$ 進入 α_i' 的數值，結果所得的 μ_α 的誤差差不多就是 dm，因爲曆元 t_i 和春分點 T_i 彼此相差很少。係數 n 的誤差對於 μ_δ 的測定的影響相似。

相反地，由於光行差和章動係數不準確而產生的歸算誤差，好像不乘上 $(T_0 - t_i)$ 一樣，對於 μ_α 和 μ_δ 的測定影響很小，因爲它們在此要除以 $(T_0 - t_i)$。

由上面這句話可瞭解確定 m 和 n 的數值與確定恆星的自行緊密地連繫着；在第十二章中還要回來討論此問題。

近 80 年內造了一些基本星表；如奧維爾斯(Auwers)，紐康 (New-

comb），包斯（Boss），艾赫里別爾格爾（Eichelberger）的星表，近年來柏林計算所造了所謂的 FK3 表。根據國際天文協會決定，今後所有天文年曆中的恆星視位置，都要按照 FK3 所給的數字計算。

§101. 天文曆書　若已造好恆星位置的基本星表，則可以計算恆星在將來的視坐標。在此，順便說一下造天文曆書的問題。為此需要完成下列計算❶。令表的春分點和曆元（在此情形中，它們相同）為 t_0（例如 1950.0）。根據星表中所給的某恆星的 α_0 和 δ_0 計算它在所選定的年初（如 1943.0）的平位置，此時係按照歲差和自行合成的公式，於是 $\alpha=\alpha_0+(t-t_0)(\mu_\alpha+m+n\sin\alpha_0\tan\delta_0)+$ 第二項和第三項，$\delta=\delta_0+$ $+(t-t_0)(\mu_\delta+n\cos\alpha_0)+$ 第二項和第三項，若周年視差不很小，還要它的影響估計在內。

然後，當計算此恆星在每隔十次（在一年中的第一次，第十一次，第二十一次等）格林尼治上中天時的視坐標，還是用帶有自行項的視坐標公式，即

$$\alpha_{視}=\alpha+\tau\mu_\alpha+Aa+Bb+Cc+Dd+E,$$

$$\delta_{視}=\delta+\tau\mu_\delta+Aa'+Bb'+Cc'+Dd'。$$

在這些公式中不包含章動短周期項，因為有了它的周期短（半個朔望月），就不可能在中間的時刻進行內插法；可以個別計算它們；為此，在曆書中就給出量 A', B' 和 f', g', G'（參看§99）。

這樣每隔 10 個恆星日或 9.9727 個平太陽日給出一次恆星的視坐標。在表的左行，給了這些時刻的準確到十分之一天的世界時（參看第 262 頁的表）。

對於拱極星（極距小於 10°），給了它的每次格林尼治上中天時的視坐標，其中包含章動短周期項。根據這些表，不難用內插法得出所需要的對於任何時刻的量（參看§45, 2）。

❶ 這裏僅指應該進行的計算，但我們不涉及那些簡短化的計算方法，它們不是按照每天計算，而是在一年中每隔相等時間才計算一次，在實際中得到採用。

蘇聯科學院理論天文研究所出版的天文年曆(Астрономический Ежегодник)給了490個恆星的視位置,都是用辛格(Цингер),別夫錯夫(Певцов),和巴甫洛夫(Павлов)的方法,其中有61個恆星是外國出版的天文曆書中所沒有的。

在262頁的表中列出了由1947年的天文年曆中選出的獵戶座α星,天龍座γ星和雙魚座ω星每隔三十天的視坐標,現將它們寫出以作爲一個例子。

從1941年起,外國曆書中只有不多亮星的視位置。這是因爲從那一年起,"Nautical Almanac"出版局每年出版"Apparent places of the 1535 fundamental stars FK3",各國的天文學家都用它。它給出對於每個恆星計算$d\alpha$和$d\delta$的公式(134, 135)中的係數,還有$d\psi$和$d\varepsilon$每天的值。

在天文年曆中,除了給出所選定恆星的視位置外,還給出每年每天的所謂"歸算量",這是把恆星年初平位置歸算到任何時刻的視位置時(或反之)所必需的量。

恆星視位置在下面情形中需要:(1)用不同於上述的所謂較差法來確定未載於基本星表中的恆星的α和δ;(2)用於每年大量進行測定地面上不同地方的經緯度及在大地測量,製圖,航海和航空中用多種多樣的方法(如絕對天頂距測量法,辛格,別夫錯夫,巴甫洛夫,達耳柯特方法等),去測定方位角;(3)測定鐘點的改正量,首先是恆星時的鐘點,然後由比較得出平太陽時的鐘點的改正量,然後用無線電發出準確時號,構成授時問題。

天文年曆中除恆星位置外,還給了太陽(每日),月球(每天兩次),大行星(每天或更多天一次)的視坐標。其中不包含章動短周期項。它們的坐標是用於:比較理論值和新的觀測值,以便改進理論。

除此之外,天文年曆還包含了各種關於交食,月掩星,衛星的數字;進行月球和行星的物理觀測所需的表;日月出沒表和各種輔助表。

第十二章 光行差，章動和歲差常數的測定

§102. **基本概念；問題的提法** 在前面各章裏除了光行差，歲差和章動的理論公式的推導以外，我們也把各個常數係數，或常簡稱爲“常數”的數值引入這些公式，當時未說明，這些數值是怎樣得到的；僅僅指出了三種計算光行差係數的方法(參考§81)。現在我們必須來研究這個問題。我們回想一下主要的公式。

光行差：

$$\alpha_{觀}-\alpha_{眞}=-k(\cos\odot\cos\alpha\cos\varepsilon+\sin\odot\sin\alpha)\sec\delta=k_0\times K,$$

$$\delta_{觀}-\delta_{眞}=-k(\tan\varepsilon\cos\delta-\sin\alpha\sin\delta)\cos\odot\cos\varepsilon-$$
$$-k\cos\alpha\sin\delta\sin\odot=k_0\times K'。$$

歲差和自行；$p=\boldsymbol{P}\cos\varepsilon$：

$$\alpha_t-\alpha_0=(t-t_0)(m+n\sin\alpha_0\tan\delta_0)+高級項+(t-t_0)\mu_\alpha=$$
$$=(t-t_0)(p\cos\varepsilon-\lambda'+p\sin\varepsilon\sin\alpha_0\tan\delta_0)+高級項+$$
$$+(t-t_0)\mu_\alpha=$$
$$=(t-t_0)p\times P+高級項-\lambda'(t-t_0)+(t-t_0)\mu_\alpha。$$

$$\delta_t-\delta_0=(t-t_0)n\cos\alpha_0+高級項+(t-t_0)\mu_\delta=$$
$$=(t-t_0)p\sin\varepsilon\cos\alpha_0+高級項+(t-t_0)\mu_\delta=$$
$$=(t-t_0)p\times P'+高級項+(t-t_0)\mu_\delta。$$

章動：

$$\alpha_{眞}-\alpha_t=\Delta\psi\sin\varepsilon(\sin\alpha_0\tan\delta_0+\cot\varepsilon)-\Delta\varepsilon\cos\alpha_0\tan\delta_0=$$
$$=qQ+小項,$$
$$\delta_{眞}-\delta_t=\Delta\psi\sin\varepsilon\cos\alpha_0+\Delta\varepsilon\sin\alpha_0=qQ'+小項。$$

我們注意到：（1）在光行差的公式中只有一個常數 k_0；（2）在歲差的公式中也只有一個常數 p，因爲 λ' 可根據天體力學的定理而準確地算出，高級項很小，甚至當 p 已經知道的只是近似值時也可以足夠準

確地算出；（3）章動的公式包含許多係數，然而，正如這現象的理論所指出的，卽使 p 和章動的各主要項（升交點黃經的 cos 和 sin）的係數已知的祇是近似值時，章動的小項也可以夠準確地算出，其原因就在於它們是小的；章動主要項的係數比率已準確地知道（參考 §113），等於 $\cos 2\varepsilon/\cos\varepsilon$；因此對於章動也只需要確定一個常數 q，也就是 $\cos\Omega$ 的係數。對於每一個恆星係數 K, K', P, P', Q, Q' 都可以足夠準確地算出。

十五世紀之前光行差常數的數值定出得不很可靠，它在 36″（依巴谷比較自己所確定的恆星黃經與提莫哈里斯和阿里斯提耳所確定的；阿耳伏拉甘尼比較自己的觀測與托勒玫的觀測，都得到 36″ 之值）與 60″（托勒玫的）之間，因此就不只一次地引起了關於它是否爲常數的懷疑。在十五世紀，烏魯格貝格比較了自己的恆星黃經與托勒玫的天文集裏的黃經，並利用了 1300 年的巨大時間間隔，得到了量 p 等於 51″.4。在十九世紀逐漸使該值更準確，約爲 50″.2—50″.3。顯然，只有在發現了歲差和光行差以及確立了歲差和光行差的理論以後，才能正確地測定 p。歲差和光行差的理論是由克萊洛（Clairaut），特別是達郎貝爾（d'Alembert），歐拉（Euler）等人根據動力學原理以及牛頓定律而得以發展的。

布拉得雷已經根據天龍座 γ 及其他恆星上中天時天頂距的確定而算出了光行差和章動常數的值 $k_0=20''.25$ 和 $q=9''.0$。

在研究的每一階段可以把未知的常數 k, p, q 近似地當作已知量 k_0, p_0, q_0（例如，20″.47；1900 年的 50″.3627；9″.21）和未知的小改正量 dk, dp, dq 之和，卽 $k=k_0+dk$, $p=p_0+dp$, $q=q_0+dq$，然後只去求這些小的改正量；這種方法大大地簡化了計算。加之，μ_α 和 μ_δ 也部份地可由先前的研究得知。我們要提醒大家，在十八世紀之初伽利略發現了一些恆星的黃緯自行，在十八世紀末葉，首先是普列波後來赫歇爾也發現了太陽在恆星間的運動。因此研究 μ_α，μ_δ 時，可以把它們

當作是由已知量 μ_α^0, μ_δ^0 和改正量 $d\mu_\alpha$, $d\mu_\delta$ 合成的。然而必須記住，對於每一個別的恆星，不能把歲差和自行對於它的坐標的影響分開，因爲 $p\times P$ 及 μ_α 兩者都乘上了 $(t-t_0)$；因此，必須把未知的改正量相加，而可能得到的僅是和數：$(dp\times P+d\mu_\alpha)$ 和 $(dp\times P'+d\mu_\delta)$。僅當由許多恆星能確定 dp（關於這可參考關於歲差的一節）以後，$d\mu$ 對於每一個恆星的這種區分和確定才是可能的。

假設，對於選定了的恆星我們在許多年內多次地確定了它的視坐標 α 和 δ，這些確定每年都是在不同的日子裏進行的。我們已近似地知道在某一年年初 t_0 時它的平均坐標 α_0, δ_0，當然，這些坐標並不是絕對準確的，設它們的未知改正量爲 $d\alpha_0$ 和 $d\delta_0$。

由 α_0 和 δ_0 出發，在觀測的每年之初我們可以用係數 p_0 和自行 μ_α^0, μ_δ^0 來計算我們的恆星的坐標，計算時也考慮到歲差的高級項；然後可以用係數 p_0, k_0, q_0 把坐標歸算到每次觀測時刻的視位置。這樣一來，我們將得到恆星的"計算"坐標 $\alpha_{算}$ 和 $\delta_{算}$.

$$\alpha_{算}=\alpha_0+(t-t_0)(p_0\times P+\mu_\alpha^0)+\text{高級項}+q_0Q+k_0K,$$
$$\delta_{算}=\delta_0+(t-t_0)(p_0\times P'+\mu_\delta^0)+\text{高級項}+q_0Q'+k_0K'。$$

把它們和觀測坐標 $\alpha_{測}$, $\delta_{測}$ 直接比較，其差別是由於未知量 α_0, δ_0 和所用係數的不準確，且由於不可避免的觀測誤差 v。因此

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{測}-\alpha_{算}&=d\alpha_0+(t-t_0)(dp\times P+d\mu_\alpha)+dq\times Q+dk\times K,\\ \delta_{測}-\delta_{算}&=d\delta_0+(t-t_0)(dp\times P'+d\mu_\delta)+dq\times Q'+dk\times K'。\end{aligned}\right\}(136)$$

從關於許多恆星的這種方程式中，應當求出未知改正量 $d\alpha_0$, $d\delta_0$, dp, $d\mu_\alpha$, $d\mu_\delta$, dq, dk。誤差 v 一部份是測量的偶然誤差；方程式的數目和最小二乘法的應用減弱了它們的影響。但是也存在系統的誤差，由一個儀器所確定的恆星赤緯，經常與由另一儀器所確定的赤緯有同一方向的偏差，偏差可能隨着恆星的赤緯而變化。要減小它們的影響就困難得多，通常必須把它們也當作偶然誤差。

可由這些方程式用不同的方法來確定未知量。可以把它們聯立求

解;但未知量顯然是小的,我們常分別地計算它們。

假若恆星的觀測包括幾十年或一百多年,那末、忽略帶有 dk 和 dq 的項或把它們當作偶然誤差,就可以根據最小二乘法由方程式(136)來確定每一個恆星的量 $d\alpha_0$, $(dp\times P+d\mu_\alpha)$ 和 $d\delta_0$, $(dq\times P'+d\mu_\delta)$。用這些量的求出的值可以改正先已算出的 $\alpha_{算}$ 和 $\delta_{算}$,而得到新的 $\alpha_{算}$ 和 $\delta_{算}$。

於是先前的方程式就變成:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{測}-[\alpha_{算}+d\alpha_0+(t-t_0)(dp\times P+d\mu_\alpha)]&=dq\times Q+dk\times K,\\ \delta_{測}-[\delta_{算}+d\delta_0+(t-t_0)(dp\times P'+d\mu_\delta)]&=dq\times Q'+dk\times K'。\end{aligned}\right\}\quad(137)$$

由這兩個方程式就可以一起地或個別地確定 dq 和 dk。在右邊引入附加的改正量 $\Delta\alpha_0$ 和 $\Delta\delta_0$ 並不是多餘的。

§103. 光行差常數的測定 光行差有周年的周期。因此從每一個恆星在一年中,最好是 2—3 年中的觀測,就可以得到 dk。害怕歲差和自行的影響是沒有根據的,因爲 $(dp\times P+d\mu)$ 已經確定和考慮到了,在 2—3 年中它們的影響是微小的。爲了減小章動的小項 $dq\times Q$ 和 $dq\times Q'$ 的影響,可以選擇這樣的恆星,對於它們在觀測的一年(或一連兩三年)中與 dq 有關的項幾乎是不變的。不難看出(幾何地),對於這一點在測量恆星赤緯的情形下章動向量 P_0P(參考圖 55)應當有恆星的赤經圈的方向,而在測量赤經時章動向量應該垂直於恆星的赤經圈。在前面已經指出(§81, 2),由赤緯而確定 dk 時,用位於 $\Pi 90°P$ 曲線上的恆星是方便的,而由赤經而確定 dk 時,一般地是利用拱極星。

對於確定 dk,更好是選擇一系列赤經均勻分佈而赤緯近似地相同的恆星,若觀測在一年中進行得很均勻,則章動對於這些恆星的影響將不會影響到結果。方程式就成爲:

$$\Delta\alpha_0+dk\times K=\alpha_{測}-[\alpha_{算}+(t-t_0)(dp\times P+d\mu_\alpha)],$$

$$\Delta\delta_0+dk\times K'=\delta_{測}-[\delta_{算}+(t-t_0)(dp\times P'+d\mu_\delta)]。$$

爲了要使根據不同的恆星而確定的量 dk 甚爲符合起見,把附加的

$\Delta\alpha_0$ 和 $\Delta\delta_0$ 引入這些方程式並不是多餘的。

測量赤經用子午儀或中星儀，測量赤緯用子午儀，豎直圈，卯酉儀；當用達爾柯特方法確定緯度的振動時卽將得到爲確定光行差係數的特別準確的資料。

必須記住對於確定 k 或 dk 的不方便的情況，爲要在光行差對赤緯的影響最大時觀測赤緯，必須觀測約在民用時6小時和18小時中天的恆星，也就是在一年中相對的月份裏的早晨和黃昏中天，因而，也就是在不同的天氣條件下。此外，準確的赤緯確定需要知道當地準確的緯度，也就是需要知道緯度的振動。爲了要使觀測包括恆星的視位置繞眞位置的整個振動（沿赤緯或赤經都相同），必須每一個月都觀測恆星，也就是說半年中必須在白天觀測。這使得光行差係數的確定十分困難，很清楚地，在所有基本天文常數中光行差係數的準確度最低。

我們不引出許多的光行差的確定方法，僅僅指出，在十九世紀上半最廣泛被採用的是白塞耳所求得的值 20″.255。他把它應用於他所出版的輔助表中："Tabulae Regiomontanae reductionum observationum astronomicorum ab anno 1750"（"康尼斯堡天文觀測歸算表"，從1750年算到1850年）。

在十九世紀下半最常用的光行差常數的值 20″.4451，是斯特魯維在捷爾巴從七個恆星經過卯酉圈時的觀測得到的。這數值被應用於普耳科夫天文台出版的輔助表中，出版時這表的名稱是：從1750年到十九世紀末這一段時期的 Tabulae quantitatum Besselianarum。

1896年在巴黎開的國際天文會議上根據紐康的建議採用了光行差常數 20″.47，按照到當時爲止所進行的許多次的確定，這是最佳的數值。根據普耳科夫的觀測紐康得到了 20″.493，由許多其他的觀測得到的是 20″.463。

在二十世紀光行差常數的確定相當一致地指出，20″.47 至少應增加到 20″.49，或者甚至增加到 20″.52。在所有基本的天文常數中光

行差常數的準確度最小，只準確到一角秒的百分之幾。百分誤差和太陽視差相等。根據 $kp_{\odot}=180.24$ 這個關係式可得下列的這兩量的相應值：

$$p_{\odot}=8''.78;\quad 8''.79;\quad 8''.80;\quad 8''.81。$$
$$k=20''.529;\ 20''.505;\ 20''.482;\ 20''.458。$$

§104. 章動係數的測定 要求連續地觀測所選定的恆星，這種觀測完全包括了章動的十九年周期在內。由幾何的考慮可以看出，從赤緯而確定 dq 時應用赤經約爲 6^h 和 18^h 的恆星是方便的，因爲對於它們來說章動對於赤緯的影響達到最大值 $\pm q(\pm 9''.21)$，由赤經而確定 dq 時一般說來最好是選用拱極星，用赤經約爲 0^h 和 12^h 的星有某種優點。假若認爲可以足夠準確地計算光行差的影響，那末基本方程式就成爲：

$$\alpha_{測}-\alpha_{表}=d\alpha_0+dq\times Q+(t-t_0)(dp\times P+d\mu_\alpha),$$
$$\delta_{測}-\delta_{表}=d\delta_0+dq\times Q'+(t-t_0)(dp\times P'+d\mu_\delta)。$$

可以冒險地把右邊的末項省略了，因爲 19 年的緣故，可能無法預先把它夠準確地算出來。這樣一來按照 α 或 δ 的每一次觀測給出了有三個未知量的方程式：

$$d\alpha_0,\ dq,\ (dp\times P+d\mu_\alpha)\ \text{或}\ d\delta_0,\ dq,\ (dp\times P'+d\mu_\delta)。$$

光行差計算的不準確對於確定章動係數的影響可以減小，假若觀測每一個恆星在光行差對恆星赤緯或赤經的影響按絕對值而言是最大的那些月份中進行，因爲此時這種影響在所有的年份裏都幾乎是不變的，而且即使它的計算不正確，每一年的誤差也是一樣的。顯然，要適合這種條件就必須每年在早晨和黃昏測量恆星的赤緯，而在子夜測量其赤經。

更好的是，正如在光行差的情形一樣，應用那些按赤經小時而分佈是很均勻的那些恆星。

在十九世紀主要應用下列的章動常數的值：（1）$8''.977$；它是白

塞耳所確定的被應用於他的表 Tabulae Regiomontanae 中；它被下值代替；（2）9″.2235；這是彼得斯(在普耳科夫)根據普耳科夫的觀測而算出的，發表於他的論文 Numerus constants nutationis (1843) 中；這篇論文包含了章動的理論公式的第一次詳細的推導；（3）在1896年在巴黎的國際天文會議上採用了 9″.210 的值；它是紐康所建議的，是到那時候爲止他由多次測定中所得出的加權平均值。

§105. 歲差常數的確定　歲差"常數"的意思是指在一個回歸年中在黃道上的日月歲差值，用字母 p 表示。量 m 和 n 和它的關係爲：$m=p\cos\varepsilon-\lambda'$；$n=p\sin\varepsilon$；$\lambda'$ 爲行星歲差，它是根據天體力學的定理計算出來的(並非由觀測而確定的)。

歲差常數的確定在本質上與光行差和章動常數的確定不同。後兩者是不變的，正如我們所看到的，它們可以只由一個恆星在一年中不同的日子或在不同的年中的觀測定出。這兩個現象都是布拉得雷在觀測天龍座 γ 星的天頂距時所發現的。歲差"常數"不可能由一個恆星的觀測來確定，因爲每一個恆星坐標極近於與時間成正比地經常變化着，其變化速度不只與歲差常數有關，而且也與這個恆星的自行 (motus proprius, m. p.)有關。因此要從恆星坐標的周年變化速度中把歲差速度分開來只有在下面的情形中才是可能的，就是用某種方法消除了恆星的自行以後。要達此目的對於恆星的自行必須作某種假設。從十九世紀到現在應用了三種假設。

I. 恆星不規則運動的假設　認爲恆星的自行是雜亂的，沒有任何規律性，在天球上偶然地分佈，使得在天球的任何小面積中對於許多恆星 $\mu_\alpha\cos\delta$ 的和以及 μ_δ 的和將等於零，因此 $\mu_\alpha\cos\delta$ 和 μ_δ 可以當作完全偶然的量。在這種情形下，在長時期中 α 與 δ 的變化，就天球的某個面積中的多數恆星來平均，所反映出的只是一種系統的影響，卽歲差的影響。因此，以符號 α_0 和 α 表示恆星在兩個獨立的曆元爲 t_0 和 t 的星表中的赤經，δ_0 和 δ 表示赤緯，卽得：

$$\left.\begin{aligned}\alpha-\alpha_0=&(m+n\sin\alpha_0\tan\delta_0)(t-t_0)+\mu_\alpha(t-t_0)+\\&+\text{歲差的小項},\\\delta-\delta_0=&n\cos\alpha_0(t-t_0)+\mu_\delta(t-t_0)+\text{歲差的小項}。\end{aligned}\right\}\quad(138)$$

或者，因爲 $m=p\cos\varepsilon-\lambda'$, $n=p\sin\varepsilon$, 則

$$\left.\begin{aligned}\alpha-\alpha_0=&p(\cos\varepsilon+\sin\varepsilon\sin\alpha_0\tan\delta_0)(t-t_0)-\\&-\lambda'(t-t_0)+\mu_\alpha(t-t_0)+\text{歲差小項},\\\delta-\delta_0=&p\sin\varepsilon\cos\alpha_0(t-t_0)+\mu_\delta(t-t_0)+\text{歲差小項}。\end{aligned}\right\}\quad(139)$$

量 λ' 可以根據天體力學的定理而算出。我們將取某個近似值 p_0 且以符號 dp 表示它的未知的改正量，使得 $p=p_0+dp$, 又計算值 λ'_0. 其改正量表爲 $d\lambda'=\lambda'-\lambda'_0$。

由量 α_0 和 δ_0 出發，我們將根據下面的公式把恆星在時刻 t 的赤經 α' 和赤緯 δ' 算出：

$$\alpha'-\alpha_0=p_0(\cos\varepsilon+\sin\varepsilon\sin\alpha\tan\delta_0)(t-t_0)-\lambda'_0(t-t_0)+$$
$$+\text{歲差的小項},$$
$$\delta'-\delta_0=p_0\sin\varepsilon\cos\alpha_0(t-t_0)+\text{歲差的小項}。$$

根據以前的研究已經可以把小項足夠準確地算出來了，由每次新的研究可以算得愈來愈準確。

由 $(\alpha-\alpha_0)$ 減去 $(\alpha'-\alpha_0)$，由 $(\delta-\delta_0)$ 減去 $(\delta'-\delta_0)$，以符號 $\frac{d\alpha}{dt}\cos\delta_0$ 表示 $\frac{\alpha-\alpha'}{t-t_0}\cos\delta_0$, 以符號 $\frac{d\delta}{dt}$ 表示 $\frac{\delta-\delta'}{t-t_0}$, 得：

$$\alpha-\alpha'=dp(\cos\varepsilon+\sin\varepsilon\sin\alpha_0\tan\delta_0)(t-t_0)+\mu_\alpha(t-t_0)-d\lambda'(t-t_0),$$

因而

$$dp(\cos\varepsilon\cos\delta_0+\sin\varepsilon\sin\alpha_0\sin\delta_0)-d\lambda'\cos\delta_0=$$
$$=\frac{d\alpha}{dt}\cos\delta_0-\mu_\alpha\cos\delta_0,\qquad(140)$$

同樣地對於赤緯：

$$dp\sin\varepsilon\cos\alpha_0=\frac{d\delta}{dt}-\mu_\delta。\qquad(141)$$

在右邊 $\frac{d\alpha}{dt}\cos\delta_0$ 和 $\frac{d\delta}{dt}$ 根據所述的計算是已知的，而 $\mu_\alpha\cos\delta$ 和 μ_δ 被當作與 α_0 和 δ_0 無關的偶然的量來研究，就像測量的偶然誤差一樣。

也應用下列的，用同樣的方法容易得到的方程式，以代替上面的方程式。

$$\left.\begin{aligned} dm\cos\delta_0+dn\sin\alpha_0\sin\delta_0&=\frac{d\alpha}{dt}\cos\delta_0-\mu_\alpha\cos\delta_0,\\ dn\cos\alpha_0&=\frac{d\delta}{dt}-\mu_\delta。\end{aligned}\right\}\tag{142}$$

常取 $d\lambda'=0$。

若在兩個星表中有大量的普通恆星，儘可能地均勻分佈於天球上，則按照 α 和按照 δ 有同樣多的方程式。

於是可分別按照 α 和 δ 用最小二乘法來計算改正值 dp。假若我們的討論是正確的，由對於 α 的方程式和由對於 δ 的方程式所得的這些值應該是相同的。

假若應用方程式 (142)，那末由它們得：由對於 α 的方程式得 dm 和 dn 的數值，由對於 δ 的方程式得 dn 的值。此時所得的 dn 的兩值應該是相同的，此外還應滿足關係式 $m=n\cot\varepsilon-\lambda'$，只要我們所有的討論是正確的；我們將假定 λ' 已準確地算出。

白塞耳用這種方法由 2200 個恆星位置的比較確定了 p 的值，這些恆星的位置是由布拉得雷於1750—1762年在格林尼治，皮阿齊(Piazzi)於1792—1813年在巴勒摩(Palermo)由觀測所得到的。爲此目的白塞耳首先處理了布拉得雷的觀測。由皮阿齊的觀測而來的星表是皮阿齊自己所得到的，出版於1814年。

白塞耳的研究發表於他的 Fundamenta Astronomiae pro anno MDCCLV deducta ex observationibus viri incomparabilis James Bradley in specula astronomica Grenovicensi per annos 1750—1762

institutis. Autore F. W. Bessel. Regiomonti 1818（對於 1755 年的天文學基礎，由無與倫比的詹姆士、布拉得雷於 1750—1762 年在格林尼治天文台所進行的觀測推出）。

白塞耳得到了對於 1750 年的值 $p=50''.3405$ 和 $l=50''.1761$。

後來白塞耳比較了布拉得雷星表中的恆星位置和他自已在康尼斯堡天文台由觀測得到的恆星位置。由這種比較他得到了下面的常數系（T 為 1800.0 後的世紀數）：

$$100\,p=5036''.35-2''.44\,T;$$
$$100\,m=4604''.37+3''.09\,T;$$
$$100\,l=5022''.35+2''.44\,T;$$
$$100\,n=2005''.96-0''.97\,T。$$

白塞耳把這值採用於自己的 Tabulae Regiomontanae（參閱上面）；它被應用於天文歸算中，當時尚未被斯特魯維-彼得斯的結果所代替（參閱後面）。

布拉得雷星表中的恆星位置在 19 個世紀中經常被用於歲差係數的確定，這些位置按時間來說是最遠的，按其準確性來說是適合於這個目的的。然而，它們只包含南天半球的少數恆星，這一個缺點常被感覺到；僅在最近的歲差係數的確定中布拉得雷的觀測才不被注意到。

假若 dp 已經算出，那末每個恆星按照 α 和 δ 的條件方程式就給出一個餘數，被當作這恆星的自行，也就是公式（140—142）中的 $\mu_\alpha\cos\delta_0$ 和 μ_δ。這樣一來，自行 $\mu_\alpha\cos\delta$ 和歲差係數 m，以及 μ_δ 和 n 是彼此緊密地關聯着的，恆星自行在天球上的分佈本質上是與所取的 m 和 n，也就是 p 的值有關的。

II. 太陽在恆星間的運動的計算　白塞耳已經知道，恆星的自行並非完全雜亂的，原因是太陽在恆星間沿着某個方向而運動。它的運動引起了所謂的恆星的視差動。因此所觀測到的每一個恆星的自行（motus proprius）由兩部份合成：（1）由這種視差動而來的 μ'（motus

parallacticus)，向着天球上由點 A 離開的方向，點 A 是太陽在天球上運動的奔赴點，和(2)由本來屬於恆星的所謂本動 (motus peculiaris) 而來的 μ''，就是說特有的本來的運動。視差動可用下面的方法來計算。設太陽的速度爲每年 v 個地球軌道半徑(即 $4.74v$ 公里/秒)，太陽奔赴點的坐標爲 A, D；恆星 $S(\alpha,\delta)$ 的距離以地球軌道半徑爲單位等於 r。那末，恆星在天球上離開奔赴點的角速度爲 $\mu'=206265''\frac{v}{r}\sin SA=$ $=v\pi\sin SA$，其中 π 表示以角秒爲單位的恆星的周年視差。不只一次地應用這方法，我們將求出視差動

$$\mu'_\alpha\cos\delta=v\pi\sin SA\sin PSA,$$

$$\mu'_\delta=-v\pi\sin SA\cos PSA;$$

P 表示赤道極。由三角形 PSA 我們將如以前屢次所做的一樣求出

$$\mu'_\alpha\cos\delta=v\pi\cos D\sin(\alpha-A)=$$
$$=\pi v\cos D\cos A\sin\alpha-\pi v\cos D\sin A\cos\alpha,$$
$$\mu'_\delta=-\pi v[\sin D\cos\delta-\cos D\sin\delta\cos(\alpha-A)]=$$
$$=-\pi v\sin D\cos\delta+\pi v\cos D\cos A\sin\delta\cos\alpha+$$
$$+\pi v\cos D\sin A\sin\delta\sin\alpha。$$

引入符號：

$$v\cos D\cos A=X;\quad v\cos D\sin A=Y;\quad v\sin D=Z,$$

便得到：

$$\mu'_\alpha\cos\delta=\pi X\sin\alpha-\pi Y\cos\alpha,$$
$$\mu'_\delta=\pi X\sin\delta\cos\alpha+\pi Y\sin\delta\sin\alpha-\pi Z\cos\delta。$$

X, Y, Z 還是我們的問題中新的未知量，將它們引入時需要知道每一個恆星的周年視差 π。我們不能準確地知道它(所以白塞耳放棄了恆星視差動的計算)，但卽使根據恆星的亮度也可以近似地估計它。顯然，所需要的不是恆星的絕對距離或者視差，能得到相對的就行。於是我們的方程式(140, 141)成爲：

$$\left.\begin{aligned}&dp(\cos\varepsilon\cos\delta+\sin\varepsilon\sin\delta\sin\alpha)-d\lambda'\cos\delta+\pi X\sin\alpha-\\&\qquad-\pi Y\cos\alpha=\frac{d\alpha}{dt}\cos\delta-\mu''_\alpha\cos\delta,\\&dp\sin\varepsilon\cos\alpha+\pi X\sin\delta\cos\alpha+\pi Y\sin\delta\sin\alpha-\\&\qquad-\pi Z\cos\delta=\frac{d\delta}{dt}-\mu''_\delta,\end{aligned}\right\}\quad(143)$$

而方程式(142)成爲這樣的：

$$\left.\begin{aligned}&dm\cos\delta+dn\sin\alpha\sin\delta+\pi X\sin\alpha-\pi Y\cos\alpha=\\&\qquad=\frac{d\alpha}{dt}\cos\delta-\mu''_\alpha\cos\delta,\\&dn\cos\alpha+\pi X\sin\delta\cos\alpha+\pi Y\sin\delta\sin\alpha-\pi Z\cos\delta=\\&\qquad=\frac{d\delta}{dt}-\mu''_\delta。\end{aligned}\right\}\quad(144)$$

爲了書寫簡便起見，α 和 δ 的足號，已省略了。在右邊 μ''(motus peculiaris）被當作天球上偶然的量來研究，由這些方程式用最小二乘法算出 dp（或 dm 和 dn）以及 X, Y, Z。

在十九世紀，就很多次應用這樣的方法，將經過很大時間間隔而取得的許多類恆星位置加以比較，確定了光行差常數。此時常假定 λ' 已算得準確了，因此 $d\lambda'=0$。

奧脫·斯特魯維用這種方法比較了從 1825 年左右捷爾巴的觀測得到的包括 400 個恆星的表和經過白塞耳處理過的布拉得雷星表而算出歲差常數。他的結果被彼得斯處理過，因而得到斯特魯維-彼得斯的常數值，在十九世紀下半這個值被廣泛地應用着。彼得斯得到了下列的一組值（T 爲 1800 年以後的世紀數）：

$$100p=5037''.98-2''.17T;\quad 100m=4606''.23+2''.85T;$$

$$100l=5024.11+2.27T;\quad 100n=2006.07-0.86T;$$

$$\lambda'\cos\varepsilon=13.87-4.44T。$$

由於對這種研究的重要性，就有了布拉得雷所觀測的儘可能準確的恆星位置，這些觀測又被歐伯爾斯所整理且被彼得堡科學院所發表：

Neue Reduction der Bradleyschen Beobachtungen aus den Jahren 1750 bis 1762，共三卷(1882, 1888, 1889)。這個星表中的恆星位置曾與最新的星表中的恆星位置比較過 此外，還引用了：拉蘭德(Lalande)星表(47,000 個恆星)，這是由他在 1800 年左右在巴黎天文台的觀測而得到的星表，以及席勒魯普星表(10,000 個恆星)，這星表是由 1865 年左右在哥本哈根的觀測而得到的。

魯德維格·斯特魯維把歐伯爾斯整理過的布拉得雷星表與 1845，1855 和 1865 年的普耳科夫星表(2500 個普通恆星)加以比較，由赤經和赤緯而得到了量 p 的幾乎相同的值。其他的研究者並未獲得這種協和情況；這種差別認爲是由於偶然誤差的緣故，由 p 的兩個值(根據 α 和 δ)就得到了加權平均值。在這些研究中認爲，在改正量 $d\lambda'$ 裏不需要計算值 λ'。

在十九世紀之末，紐康比較了歲差常數的所有確定，給予魯·斯特魯維的結果以最大的權重，對於回歸世紀求出了 $\boldsymbol{P}=5489''.78-$ $-0''.00364\,T$。由此當 $\varepsilon\,(1850.0)=23°27'31''.68$ 時，他得到了

$100\ p=5036''.02+0''.50\,T;\quad 100\,l=5023''.71+2''.22\,T;$

$100\,m=4606.36+2.79\,T;\qquad 100\,n=2004.79-0.85\,T;$

T 表示在 1850 年之前$(-T)$或之後$(+T)$的世紀數。

這組常數以 N_0 表示；它被紐康應用於他的行星運動的表中，並在其研究的報告 "Astronomical Constants" 中有所論述。

過了幾年紐康又重覆了這個工作而得到了他的第二組常數，記爲 N_{96}。根據國際的協議自 1896 年以後它就被應用於所有的天文歸算中。在第 225 頁上的表中的數目就是以它爲基礎的。

$$\boldsymbol{P}=5490''.66-0''.00364\,T;$$

$100\,p=5036''.84+0.50\,T\qquad 100\,m=4607''.11+2''.79\,T;$

$100\ l=5024.53+2.22\,T;\qquad 100\ n=2005.11-0.85\,T$。

T 值與前同。

上面已經提到，在這些研究中假設，行星歲差可以準確地計算而不需要改正量 $d\lambda'$。這並不完全對，因爲計算 λ' 時需要知道行星的質量，特別是金星的質量，金星在 λ' 數值中的影響約佔 60%。金星的質量知道得不夠準確（因爲它沒有衞星），在今日，誤差可能達到 1%；然而在 $100\lambda'$ 值中的誤差只能達到 0″.08。

同時以方程式(143, 144)爲基礎的多次測定，包括巴里斯基（Парийский），奧高洛德尼柯夫（Огородников）和費森柯夫（Фесенков）的研究，一致地指出，爲了要滿足關係式 $m=n\cot\varepsilon-\lambda'$，或者必須容許在 $100\lambda'$ 中有 1″ 左右的誤差，或者把附加的未知數 dE 引入方程式(143, 144)，使所得的方程式成爲：

$$\left.\begin{aligned} &dp(\cos\varepsilon\cos\delta+\sin\varepsilon\sin\delta\sin\alpha)-dE\cos\delta+\pi X\sin\alpha-\\ &\qquad-\pi Y\cos\alpha=\frac{d\alpha}{dt}\cos\delta-\mu_\alpha''\cos\delta,\\ &dp\sin\varepsilon\cos\alpha+\pi X\sin\delta\cos\alpha+\pi Y\sin\delta\sin\alpha-\\ &\qquad-\pi Z\cos\delta=\frac{d\delta}{dt}-\mu_\alpha'', \end{aligned}\right\} \tag{145}$$

或者

$$\left.\begin{aligned} &dm\cos\delta+dn\sin\alpha\sin\delta-de\cos\delta+\pi X\sin\alpha-\\ &\qquad-\pi Y\cos\alpha=\frac{d\alpha}{dt}\cos\delta-\mu_\alpha''\cos\delta,\\ &dn\cos\alpha+\pi X\sin\delta\cos\alpha+\pi Y\sin\delta\sin\alpha-\\ &\qquad-\pi Z\cos\delta=\frac{d\delta}{dt}-\mu_\delta'', \end{aligned}\right\} \tag{146}$$

其中 $de=dE-d\lambda'$。

在這種情形下對於 1850 年紐康的 N_{96} 的值 $100p=5036''.84$ 的改正量 $100\,dp$ 爲 $+1''$，未知量 $100\,dE$ 的值也約 $+1''$。在這些研究的第三步中也得到類似的改正量。

III. 銀河系旋轉的計算　極爲扁平的銀河系在旋轉的思想，在一百年前就似乎是自然的甚至是必然的了。謝恩費耳德在 1882 年在推

導歲差常數時就推出了計算這種旋轉的公式，他假設整個系統好像輪子一樣地以同一角速度而旋轉。魯·斯特魯維應用了這些公式，但得到了不確定的結果。僅當 1927 年奧爾特 (Oort) 發現了銀河系旋轉的規律以後，這問題才有了穩固的基礎，銀河旋轉定律就是：在太陽附近的恆星的線速度，隨着它們與銀河中心距離的增加而減小，正如行星的線速度隨着它們與太陽距離的增加而減小一樣。因此，恆星的日心角速度（所觀測到的它們的自行）隨着它們的黃經的不同而異，奧爾特所發展的理論指出，這些速度由下列公式❶表出：

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{dl}{dt}\cos b\right)_g &= \frac{A}{4.74}\cos 2(l-l_0)\cos b + \frac{B}{4.74}\cos b,\\ \left(\frac{db}{dt}\right)_g &= -\frac{A}{4.74}\sin 2(l-l_0)\sin b\cos b。\end{aligned}\right\}\qquad(147)$$

這裏 l, b 爲恆星的銀經和銀緯，l_0 爲銀河中心的黃經，A 和 B 爲某兩個常數，符號 g 表示這些速度是因銀河系旋轉而產生的。

引入符號：

$$\frac{A}{4.74}\cos 2l_0 = C;\quad \frac{A}{4.74}\sin 2l_0 = S;\quad \frac{B}{4.74} = Q,$$

得到：

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{dl}{dt}\cos b\right)_g &= C\cos 2l\cos b + S\sin 2l\cos b + Q\cos b,\\ \left(\frac{db}{dt}\right)_g &= -C\sin 2l\sin b\cos b + S\cos 2l\sin b\cos b。\end{aligned}\right\}\qquad(148)$$

由於銀河的旋轉每個恆星的本動分爲兩部份：一部份是規則的，由這些公式表出，另一部份被當作眞正特殊的運動來研究，不遵守任何定律，且與確定恆星自行的觀測的偶然誤差有關連。

❶ 它們的推導參看 П. Ф. Полак（波拉克）：Введение в звёздной астрономию, ОНТИ, 1935（恆星天文學入門）以及 П. П. Паренаго（巴連拿果）：Курс звёздной астрономии, 2-е издание. Гостехиздат, 1946（恆星天文學教程）。譯者註：後面這本書已有中譯本："星系學"，陳彪譯，商務印書館出版。

爲了用銀河旋轉的計算來確定 dp 和 dE，引用銀經和銀緯以代替赤經和赤緯是方便的。爲此對於每一個恆星必須由計算的速度

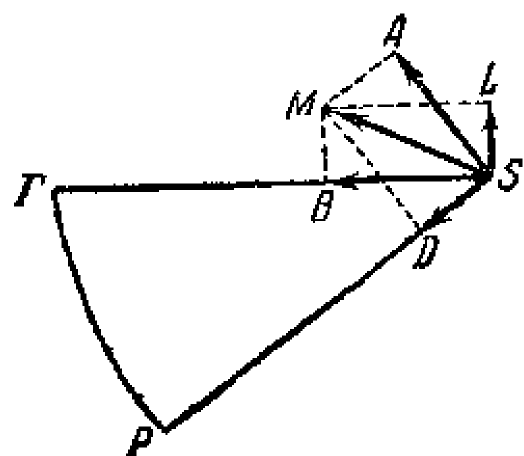


圖 67.

$$\frac{d\alpha}{dt}\cos\delta=\frac{\alpha-\alpha_0}{t-t_0}\cos\delta \text{ 和 } \frac{d\delta}{dt}=\frac{\delta-\delta_0}{t-t_0}$$

而求出以銀道坐標表示的相應的速度 $\frac{dl}{dt}\cos b$ 和 $\frac{db}{dt}$。

量 $\frac{dl}{dt}\cos b$ 和 $\frac{db}{dt}$ 可根據圖 67 而得到，其中 P 爲赤極，Γ 爲銀極，S 爲恆星，SM 爲 μ:

$$SA=\frac{\alpha-\alpha_0}{t-t_0}\cos\delta;\quad SD=\frac{\delta-\delta_0}{t-t_0};$$

$$SL=\frac{dl}{dt}\cos b;\qquad SB=\frac{db}{dt}。$$

根據向量投影的規則，有：

$$\left.\begin{aligned}\frac{dl}{dt}\cos b&=\frac{d\alpha}{dt}\cos\delta\cos PS\Gamma-\frac{d\delta}{dt}\sin PS\Gamma,\\ \frac{db}{dt}&=\frac{d\delta}{dt}\cos PS\Gamma+\frac{d\alpha}{dt}\cos\delta\sin PS\Gamma。\end{aligned}\right\}\tag{149}$$

角 $PS\Gamma=\gamma$ 可由球面三角形 $PS\Gamma$ 而定出；其中 $\Gamma PS=A_0-\alpha$，A_0 表示點 Γ 的赤經；$P\Gamma$ 等於赤道面和銀道面的交角。我們有公式：

$$\sin\Gamma S\sin\gamma=\sin P\Gamma\sin(A_0-\alpha),$$

$$\sin\Gamma S\cos\gamma=\cos P\Gamma\cos\delta-\sin P\Gamma\sin\delta\cos(A_0-\alpha);$$

由它們
$$\tan\gamma=\frac{\sin P\Gamma\sin(A_0-\alpha)}{\cos P\Gamma\cos\delta-\sin P\Gamma\sin\delta\cos(A_0-\alpha)},$$

$\sin\gamma$ 與 $\sin(A_0-\alpha)$ 同號。

通常取 $A_0=12^h40^m$，$P\Gamma=62^\circ.0$（對於 1900.0）。

速度 $\frac{dl}{dt}\cos b$ 和 $\frac{db}{dt}$ 代表下列的和數：（1）由於太陽在恆星間運動的視差速度，（2）由於銀河系旋轉的速度，（3）在歲差常數中的誤差

dp 和量 dE（參看上面）和（4）與觀測的偶然誤差一起的不規則的速度。

爲了表示視差速度，以字母 X, Y, Z 表示太陽的速度 v 在 x, y, z 軸上的投影，x, y, z 軸與銀道坐標有關：x 軸指向 $l=0$, $b=0$ 的點；y 軸指向 $l=90^\circ$, $b=0$ 的點；z 軸指向點 Γ。於是，正如同 II 的情形（太陽運動的計算），有：

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{dl}{dt}\cos b\right)_{\odot}&=\pi X\sin l-\pi Y\cos l,\\ \left(\frac{db}{dt}\right)_{\odot}&=\pi X\sin b\cos l+\pi Y\sin b\sin l-\pi Z\cos b\text{。}\end{aligned}\right\}\qquad(150)$$

銀河系旋轉的影響由公式(148)表示。

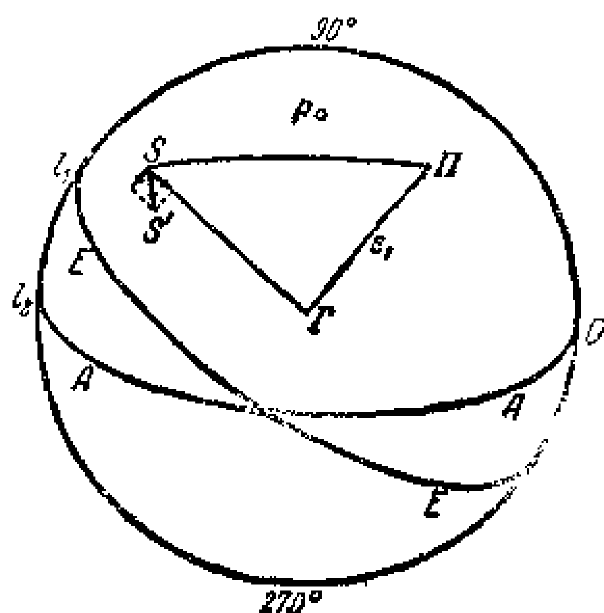


圖 68.

圖 68 是爲了推導量 dp 和 $-dE$ 對於 $\frac{dl}{dt}\cos b$ 及 $\frac{db}{dt}$ 的影響而作的，圖中所示爲半個天球，北銀極 Γ 在中心。整圓表示銀道，P 爲赤極，Π 爲黃極，S 爲恆星。以字母 l_1 和 ε_2 表示升交點黃經和黃道與銀道面的交角。若取銀極的坐標爲 $A=12^h40^m$, $D=+28^\circ.0$ (1900)，那末對於 1950 年：

$$l_1=153^\circ.3;\ \varepsilon_1=60^\circ.6;\ l_2=180^\circ.0;\ \varepsilon_2=62^\circ.3\text{。}$$

量 dp 爲春分點在黃道上由於日月歲差的速度改正量；由它得到恆星在天球上的運動等於 $dp\cos\beta$；它由向量 SS' 表示，這向量垂直於黃經圈 ΠS。把它投影於弧 ΓS 和弧的垂線上，得：

$$\left(\frac{dl}{dt}\cos b\right)_p=SS'\cos\Gamma SS'=dp\cos\beta\cos\Gamma SS',$$

$$\left(\frac{db}{dt}\right)_p=SS'\cos\Gamma SS'=dp\cos\beta\cos\Gamma SS'\text{。}$$

在三角形 $\Gamma\Pi S$ 中，$\Gamma\Pi=\varepsilon_1$; $\Gamma S=90^\circ-b$; $\Pi S=90^\circ-\beta$; $\Pi\Gamma S=$

$=l+90^\circ-l_1$; $\Gamma SП+\Gamma SS'=90^\circ$，由這三角形得：

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{dl}{dt}\cos b\right)_p &= dp\cos\beta\sin\Gamma SS' = dp\cos\beta\cos\Gamma SП = \\ &= dp[\cos\varepsilon_1\cos b-\sin\varepsilon_1\sin b\cos(l+90^\circ-l_1)] = \\ &= dp[\cos\varepsilon_1\cos b+\sin\varepsilon_1\sin b\sin(l-l_1)], \\ \left(\frac{db}{dt}\right)_p &= dp\cos\beta\cos\Gamma SS' = dp\cos\beta\sin\Gamma SП = \\ &= dp\sin\varepsilon_1\sin П\Gamma S = dp\sin\varepsilon_1\cos(l-l_1)。\end{aligned}\right\}\quad(151)$$

改正量 $-dE$ 與赤道的關係，和改正量 dp 與黃道的關係同，因此同樣地得到

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{dl}{dt}\cos b\right)_e &= -dE[\cos\varepsilon_2\cos b+\sin\varepsilon_2\sin b\sin(l-l_2)], \\ \left(\frac{db}{dt}\right)_e &= -dE\sin\varepsilon_2\cos(l-l_2)。\end{aligned}\right\}\quad(152)$$

把所有的項加起來，並使它們等於根據公式(149)由 $\frac{d\alpha}{dt}$ 和 $\frac{d\delta}{dt}$ 得出的 $\frac{dl}{dt}\cos b$ 與 $\frac{db}{dt}$ 之和，有：

$$\left.\begin{aligned}\overline{\frac{dl}{dt}}\cos b &= \pi X\sin l-\pi Y\cos l+C\cos 2l\cos b+S\sin 2l\cos b+ \\ &+Q\cos b+dp[\cos\varepsilon_1\cos b+\sin\varepsilon_1\sin b\sin(l-l_1)]- \\ &-dE[\cos\varepsilon_2\cos b+\sin\varepsilon_2\sin b\sin(l-l_2)], \\ \overline{\frac{db}{dt}} &= \pi X\sin b\cos l+\pi Y\sin b\sin l-\pi Z\cos b- \\ &-C\frac{1}{2}\sin 2l\sin 2b+S\frac{1}{2}\cos 2l\sin 2b+ \\ &+dp\sin\varepsilon_1\cos(l-l_1)-dE\sin\varepsilon_2\cos(l-l_2)。\end{aligned}\right\}\quad(153)$$

這些方程式並不應用於個別的恆星，而是應用於在天球上彼此相近的星羣；這可由 $\overline{\frac{dl}{dt}}\cos b$ 和 $\overline{\frac{db}{dt}}$ 之上的短線看出來。量 l 和 b 是對於這些星羣的中心而言的。

對於未知量 dp, dE, X, Y, Z, C, S, Q 的測定，近幾年中曾根據這些公式用自行的不同來源進行過多次，自行是比較兩本或幾本星表而決定的。它們都一致地得出這個結論：對於紐康的值 $100p=5037''.08$ (對於1900.0) 的改正量甚近於每100年爲 $+1''$，又每百年爲 $-dE=$ $=-1''$。

必須注意，爲方便起見確定 dp 和 $-dE$ 時要應用位於銀道面兩邊的窄帶內的恆星，也就是有小的正 b 或負 b 的那些恆星，而且只應用有 $\frac{db}{dt}$ 的方程式。於是平均 $b=0$，得到這樣的方程式：

$$\frac{\overline{db}}{dt}=-\pi Z+dp\sin\varepsilon_1\cos(l-l_1)-dE\sin\varepsilon_2\cos(l-l_2);\quad(154)$$

它只包含三個未知量。

§106. 各天文常數間的關係；常數系　通常我們總傾向於獨立地測定每一個天文常數的數值，並將測定的方法加以適當的選擇，使此常數達到最大的準確度。然而在某些常數間存在着一些關係，由現象的理論可以推出來。常數的數值應當準確地滿足這些關係。因爲在這些常數的測定中不可避免地有誤差，這些關係只能近似地滿足，於是就發生了一個問題：估計每一個常數的可能的不準確度以後，求出能準確地滿足理論關係的數值，而最後被採取的常數數值，與由觀測所測定的值的差，只能在被容許的誤差範圍之內。這樣就得到了一致的天文常數系。或者將把某些常數當作基本的，其餘的常數則根據理論關係而算出。我們現在指出常數之間的關係的幾個例子。

1. 早就指出過 (§81) 太陽視差與光行差常數之間的關係，設光速已知，

$$k_0 p_\odot=180.24。$$

2. 在§68中已引出月行差 L 與量 μ, $p_\odot$ 和 $p_{\text{》}}$ 之間的關係，L 是由行星，例如，最好是愛神星的觀測而定出的：

$$L=206265''\frac{p_\odot}{3422.5}\times\frac{\mu}{1+\mu},$$

$3422''.5$ 爲 $\sin p_☽$。

3. 太陽視差 $p_\odot$ 與太陽質量 $M_\odot$ 和地球質量 M 及月球質量 $M_☽$ 和數 m 的比率之間存在着一個關係。它由下面的方法近似地得到。取地球爲半徑等於 R 的球；地球的引力給予地面上物體的加速度等於 $k^2\dfrac{M}{R^2}$；因此 $k^2=\dfrac{fR^2}{M}$。另一方面，根據克普勒第三定律 $k^2=\dfrac{4\pi^2a^3}{P^2(M_\odot+m)}$，其中 a 爲由太陽到 $m=M+M_☽$ 的重心的平均距離；P 爲恆星年。

使 k^2 的兩式相等，得：

$$\frac{4\pi^2R^3}{\sin^3 p_\odot P^2(M_\odot+m)}=\frac{fR^2}{M},$$

由此

$$\sin^3 p_\odot\frac{M_\odot+m}{M}=\frac{4\pi^2R}{P^2f}。$$

令 $\dfrac{M_☽}{M}=\mu$，得 $M=m/(1+\mu)$，於是

$$\sin^3 p_\odot\frac{M_\odot+m}{m}=\frac{4\pi^2R}{fP^2(1+\mu)},$$

最後，

$$p_\odot^3\frac{M_\odot+m}{m}=\frac{4\pi^2R}{fP^2(1+\mu)}\,206265'';$$

在右邊近似地令 $R=6371\times10^5$ 厘米；$P=365.2563\times86400^s$；$f=981$（在中緯度的重力加速度 980 厘米/秒^2+離心力約 1 厘米/秒^2）以及 $\mu=1:81.53$，得 $p_\odot\sqrt[3]{\dfrac{M_\odot+m}{m}}=606''.58$。根據地球形狀理論而算出更準確的加速度 f，得到公式：

$$p_\odot\sqrt[3]{\frac{M_\odot+m}{m}}=607''.052。$$

4. 歲差和章動的理論（參考第十三章）給出用於確定量 μ 的關係，假定由觀測已知黃經歲差 p（或 $n=p\sin\varepsilon$）和 $\Delta\varepsilon$ 中乘以 $\cos\Omega$ 的主要項的係數。

在今日，根據 1896 年在巴黎的國際協議，採取了紐康所定出的天文常數系；參考附錄。本書中所有的數值都是由它取出的。

若不只一次地考慮到上述的改正量 dp 和 dE，則得到下列的周年光行差的公式。在這些公式中 p, m, n, λ' 表示紐康系中周年速度的數值，並取在一世紀中 $dp=+1''.0$，$dE=+1''.1$。

$$\frac{d\alpha}{dt}=(p+0''.01)\cos\varepsilon-\lambda'-0''.011+(p+0''.01)\sin\varepsilon\sin\alpha\tan\delta=$$

$$=p\cos\varepsilon-\lambda'+0''.009-0''.011+(n+0''.004)\sin\alpha\tan\delta=$$

$$=m-0''.002+(n+0''.004)\sin\alpha\tan\delta。$$

$$\frac{d\delta}{dt}=(p+0''.01)\sin\varepsilon\cos\alpha=(n+0''.004)\cos\alpha。$$

在 1938 年發表了德·西特爾 (de Sitter) 的關於常數系的研究。他取了一些量作爲由之出發的基本常數，包括太陽視差 $=8''.803$；月球質量 $=\frac{1}{81.53}$，地球平均半徑 $=6,371,260$ 米，並由它們推出光行差常數 $=20''.477$，章動常數 $=9''.218$ 等等。參考附錄。

然而，正如前面提過的(§68)，鍾斯由 1930—1931 年愛神星的觀測而得到太陽視差 $p_{\odot}=8''.790\pm0''.001$。把它和其他常數聯起來，鍾斯求得了，例如，章動常數 $9''.2266$；月球質量 $\frac{1}{81.288}$。

使各個常數彼此符合是現代天文學的主要任務之一。

第十三章 地球的自轉,日月歲差和章動

補充本章的目的是爲了:(1)根據動力學的定理,比以前更精確地描寫地球的自轉,所用到的動力學定理不加證明,學生可以參考力學教程(例如,H. E. 儒可夫斯基教授的力學教程),和(2)給出歲差和章動的各主要項的初步推導,以便弄清楚,各種係數的數值和什麼量有關並且關係如何,這些係數已在§87和§92的歲差和章動的公式和表內列出。

關於(1)轉動慣量和(2)主動量矩的概念和定理,是地球自轉的理論的基礎,地球是被當作剛體來研究的,就是說組成地球的質點的相互位置不變。

§107. 轉動慣量 若 m 爲一物體的一質點的質量,r 爲這質點和任一直線的距離,那末 m 和 r 的平方的乘積之和 Σmr^2 稱爲這物體對於這直線的轉動慣量;這個和數是對於整個物體而求出的。轉動慣量可用 $M\rho^2$ 的形式表出,其中 M 爲物體的質量;這樣表示時 ρ 就稱爲物體對於這直線的迴轉半徑。可以證明,如果把對於通過一點 O 的不同直線的轉動慣量定出來,然後在每一條這種直線上由點 O 向兩邊作兩個矢量,矢量的大小等於 $\frac{1}{\sqrt{M\rho^2}}$,其中 ρ 爲對於這直線的迴轉半徑,那末這些矢量的端點總在某個橢球的表面上,無論物體的形狀和各部份的密度如何都是這樣;這個橢球的形狀和大小與物體的形狀、物體各部份的密度以及點 O 的位置都有關係;這叫做慣量橢球。

如果點 O 是物體的重心,那末轉動慣量就是最小的;因此這樣的所謂中央慣量橢球就是所有可能的橢球中的最大者;中央慣量橢球的主軸稱爲所研究的物體的慣量主軸。在研究剛體繞不動點,特別是繞重心而轉動的情形下,對於這一點的慣量橢球就是重要的;物體本身的形狀已經沒有任何重要性了。

中央慣量橢球可能是球(例如,在球或立方體的情形下就是這樣,

如果它的密度各處都相同，或者在所有方向的變化都相同)；它也可能是旋轉橢球(例如,對於某種旋轉體就是這樣,在這種旋轉體中,垂直於旋轉軸的每一層的密度,只和與軸的距離有關)。

雖然，地球各部份的密度當然都不相同，但由於外形的對稱性，而且，可以推測，內部構造也有對稱性，所以對於地球來說中央慣量橢球可取作扁的旋轉橢球,其短軸和地球表面的短軸有一個小的交角;但是不能保證這兩軸完全重合。根據規則，中央慣量橢球的短軸對應於最大的轉動慣量;以字母 C 表示這轉動慣量,對於通過中心且和短軸垂直的任何軸線的轉動慣量,則以字母 A 表之。

§108. 動量矩 如果在某個時刻質量爲 m 的質點以速度 v 而運動,那末乘積 mv 稱爲這個質點的動量。設想有一平面通過剛體的重心(或質心) O，有一直線 Ox 和這平面垂直；把一個系統或一個剛體的質點以及它們的速度投影在這平面上；我們以符號 v_x 表示速度的投影,以符號 p_x 表示由中心 O 到這投影的垂線；p_xv_x 爲這質點在這平面上投影的掠面速度的兩倍,乘積 mp_xv_x 則爲它對於 Ox 軸的動量矩。由一邊來看投影平面時,我們將看到這質點的投影的運動是反時針方向的,由另一邊來看則爲順時針方向;我們規定反時針的轉動爲正,按照這個規定我們由點 O 的一邊在 Ox 軸上作大小等於 mp_xv_x 的一矢量,由矢量所在的一邊來看，運動是反時針的。對整個物體而求出的這種矢量的和數 Σmp_xv_x 就是整個系統或整個物體對於 Ox 軸的動量矩。

我們對於直角坐標系 $Oxyz$ 的其他兩軸作出類似的動量矩的和數 Σmp_yv_y 及 Σmp_zv_z。在相應的軸上由點 O 作矢量以表示動量矩的這些和數。作這些矢量的幾何和,它就是以這些矢量爲邊的平行六面體的對角線。這對角線稱爲物體在這時刻的主動量矩;以 OG 表示。在力學中可以證明,若由點 O 取任意方向並算出對於這方向的動量矩之和,那末這和數將小於主動量矩,所以主動量矩的方向就是對於它來說動量矩之和是最大的方向。

假設，剛體繞重心轉動，在所研究的瞬間轉動軸線為 OP，這就是所謂的瞬時轉動軸線，並設轉動的角速度為 ω。則質點 m 對於軸線 OP 的動量矩為 $mr^2\omega$，r 是它和 OP 的距離；對於物體的所有質點來說這些矢量都指向一邊，所有動量矩之和，也就是說整個物體的動量矩，等於 $\Sigma mr^2\omega=\omega\Sigma mr^2=\omega\times$ 物體對於轉動軸線 OP 的轉動慣量。

可以證明，在一般情形下 OP 並不是主動量矩的方向，這個方向可以用下面的方法得到：設想有中央慣量橢球；設瞬時轉動軸線 OP 和這橢球的表面相交於點 P；設想有一平面和慣量橢球的表面切於點 P，由中心到這平面的垂線為 ON；則 ON 就是主動量矩的方向。顯然，只有當 OP 和慣量橢球的一條主軸重合時，ON 才和 OP 重合。

§109. 太陽和月球對於地球的吸引 因為地球是扁的，所以太陽(和月球)對於地球的各質點的引力的合力 F，並不通過地球的重心。設想在地心有兩個力 F' 和 F''，大小等於 F，方向和 F 的方向平行，且 F' 在 F 的這一邊，F'' 在相反的一邊。加上這種互相抵消的力並不會影響地球的運動；但這樣一來就有：加於地球重心的力 F' 以及力偶 (F, F'')。根據力學的普通定理，地球的運動是這樣發生的，它的重心的運動好像具有地球的質量的質點在力 F' 作用之下的運動一樣；力偶 (F,F'') 對地球繞其重心的轉動有影響，同時這種影響正如同地球重心不動一樣。刻畫力偶的作用的量，是力 F 和力 F 及 F'' 間的線距離的乘積；這個乘積稱為 (F,F'') 的力偶矩；在幾何方面它是一個矢量，大小等於力偶矩，方向指着這樣一邊，從這一邊來看，力偶趨向於使物體沿反時針的方向轉動。

在理論力學中可以證明，由於地球的大小和它與太陽(以及與月球)的距離相比是小的，且由於地球的橢率也不大，所以 F' 和地球及太陽重心間距離的平方成反比，這種反比的準確度是很高的(對於月球來說，這種準確度就比對於太陽的準確度小)，而 (F, F'') 的力偶矩可用公式表為：

$$3k^2\frac{M}{R^3}(C-A)\sin\delta\cos\delta, \tag{155}$$

其中 k^2 爲牛頓引力係數, M 爲太陽(或月球)的質量, R 爲地球和太陽(月球)重心之間的距離, C 爲地球的對於中央慣量橢球短軸的轉動慣量,這慣量橢球當作旋轉橢球, A 爲地球對於慣量橢球赤道平面上任何軸線的轉動慣量,因此 $C>A$; δ 爲在所討論的時刻太陽(月球)的赤緯。R 和 δ 隨着時間而變。在這個公式中,力偶距和 $\sin\delta\cos\delta$ 成正比,也就是和太陽(月球)赤緯的兩倍的正弦成正比,這一點對於以後要講的材料是很重要的。

從下面力偶的近似推導中可以看出這和什麼有關。設想地球由下列兩部份合成:(1)質量爲 M 的圓球,半徑等於大地橢球的半短軸,質量分佈均勻(或者,質量分佈不均勻,分成一層一層的,但密度沿任何半徑的變化都相同),以及(2)加於圓球上的一層物質,因有這層物質才使實際的大地具有橢球形。我們把這附加的一層物質分爲兩半,每一半的質量爲 M':有一半向着太陽,其他一半背着太陽;這兩半的分界面通過地軸並和圖 69 的平面垂直;圖 69 的平面通過地球的短軸和太陽的中心。設這兩半的重心爲 C' 和 C''; C 爲地心。顯然, C' 和 C'' 在圖的平面上,且 $C'C=CC''=c$。太陽對於地球的引力由三個力合成,這些力都在圖的平面上:(1)通過地心 C 的力 f,等於 $k^2\frac{MM_\odot}{R^2}$,(2)太陽對於向着它的附加層的一半的引力 f',和(3)太陽對於背着它的附加層的一半的引力 f''。由於地球的大小和 R 相比很小,可以認爲後面這兩個力通過 C' 和 C''。力 $f'=k^2\frac{M'M_\odot}{C'S^2}$,力 $f''=k^2\frac{M''M_\odot}{C''S^2}$。它們的方向之差不大,大小之差更小,尤其是因爲太陽(和月球)的赤緯小於 30°。我們把它們當作和 CS 平行,並分解爲:

$$f'=\frac{1}{2}(f'+f'')+\frac{1}{2}(f'-f'')$$

和　　　　$$f''=\frac{1}{2}(f'+f'')-\frac{1}{2}(f'-f'')。$$

兩力$\frac{1}{2}(f'+f'')$的合力$(f'+f'')$通過C且與力f相合，而方向相反的兩力$\frac{1}{2}(f'-f'')$給出了所求的力偶，其力偶矩等於

$$\frac{1}{2}(f'-f'')\times C'C''\sin\delta=\frac{1}{2}(f'-f'')2CC'\sin\delta=(f'-f'')c\sin\delta。$$

兩力之差$f'-f''$可以下列的方式得到：

$$f'=k^2\frac{M'M_\odot}{C'S^2}=k^2\frac{M'M_\odot}{(R-CC'\cos\delta)^2}=$$

$$=k^2\frac{M'M_\odot}{R^2\left(1-c\cos\frac{\delta}{R}\right)^2}=k^2\frac{M'M_\odot}{R^2}\left(1-\frac{c\cos\delta}{R}\right)^{-2}=$$

$$=k^2\frac{M'M_\odot}{R^2}\left(1+2\frac{c\cos\delta}{R}+3\frac{c^2\cos^2\delta}{R^2}+\cdots\right)。$$

同樣可得：

$$f''=k^2\frac{M'M_\odot}{R^2}\left(1-2\frac{c\cos\delta}{R}+3\frac{c^2\cos^2\delta}{R^2}-\cdots\right)。$$

因此　　$$\frac{1}{2}(f'-f'')=k^2\frac{M'M_\odot}{R^2}\times\frac{2c\cos\delta}{R}=2k^2\frac{M'M_\odot}{R^3}c\cos\delta。$$

最後，力偶矩

$$2k^2\frac{M'M_\odot}{R^3}c\cos\delta\times C'C''\sin\delta=2k^2\frac{M'M_\odot}{R^3}c\cos\delta\times 2c\sin\delta=$$

$$=2k^2\frac{M'M_\odot}{R^3}c^2\sin 2\delta。$$

從這個近似公式，正如同從準確的公式一樣，可以看出，力偶矩和吸引物體（太陽或月球）的赤緯的兩倍的正弦以及吸引物體的質量成正比，和吸引物體與地心距離R的立方成反比。$\sin 2\delta$的絕對值的變化由赤緯來決定，在太陽的情形下由O（當$\delta=0$時）變到$\sin 2\varepsilon$（ε為黃赤交角），而在月球的情形下則由O變到白道與赤道的交角（其值作周期

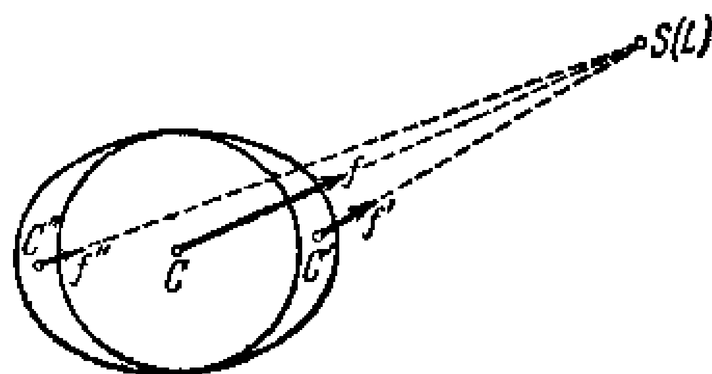


圖 69.

性變化，見§32）的兩倍的正弦。

至於表示這個力矩的矢量，因爲所有的力總在通過地球的慣量橢球短軸的平面上，這短軸和地球自轉軸的方向之差是十分微小的，所以，和這平面垂直的力偶矩矢量總在天赤道平面上。在圖 69 中，太陽的赤緯取爲正，從圖中可以看出，力偶矢量是向着讀者的，然而必須了解，它總是向着這一邊的，卽使 $\delta<0$ 時也是這樣；例如，若太陽的位置和圖中所畫出者在一直徑的兩邊，則太陽也趨向於使地球沿反時針的方向轉動。力偶矢量的位置載於下兩表中。

$$0<\delta_{\odot}<+\varepsilon$$

太陽的位置，它的 α	$0^\circ<\alpha<90^\circ$	$90^\circ<\alpha<180^\circ$
力偶矢量的位置，它的 α	$270^\circ<\alpha<360^\circ$	$0<\alpha<90^\circ$
力偶矢量的相對長度正比於	由 0 至 $\sin 2\varepsilon$	由 $\sin 2\varepsilon$ 至 0

$$0>\delta_{\odot}>-\varepsilon$$

太陽的位置，它的 α	$180^\circ<\alpha<270^\circ$	$270^\circ<\alpha<360^\circ$
力偶矢量的位置，它的 α	$270^\circ<\alpha<360^\circ$	$0<\alpha<90^\circ$
力偶矢量的相對長度正比於	由 0 至 $\sin 2\varepsilon$	由 $\sin 2\varepsilon$ 至 0

這樣一來，如果我們把天球中心當作矢量的原點並且認爲地球和太陽的距離 R 不變，那末一年中矢量的末端將在赤道平面上畫出同一圖形兩次，矢量的長度和 $\sin 2\delta$ 成正比；以後會看出，矢量末端究竟畫出什麼圖形。

在月球的情形下也有類似的情況，所不同的只是白道在赤道上的升交點代替了春分點，矢量的末端在一個恆星月中描出自己的路徑兩次，圖形的軸線與交點間的連線同方向，軸線繞着向春分點的方向作周

期性的振動，因爲升交點繞着這個方向沿赤道以 18.6 年的周期作周期性的振動，在振動過程中它和春分點的距離不大於 $13°2'$。

§110. **基本定理** 研究地球轉動的基本定理就是下面的力學的普遍定理：假若不變的物體繞其重心 O 而旋轉，而且在運動的每一個時刻它的主動量矩以矢量 OG 表示，那末矢量末端，點 G 的運動速度，按大小和方向而言，由在這時刻作用於物體的力偶矩決定。

由此可知，（1）假若在運動的全部時間中力偶矩爲零，也就是說物體只由於慣性而轉動，那末在運動的全部時間中主動量矩的大小和方向都不變；（2）假若在運動的全部時間中力偶矩與主動量矩的矢量垂直，那末點 G 總在與 OG 垂直的方向上運動，因此主動量矩的大小不變，只是方向在變，其角速度（以弧度計算）在每一時刻等於 $\frac{\text{力偶矩}}{OG}$；此時物體對於矢量 OG 的轉動，與 OG 靜止時一樣。

我們將把這個定理應用於：（1）地球由於慣性而轉動的情形，（2）日月歲差和章動的計算。

§111. **地球因慣性的轉動** 根據我們對於地球所知的一切看來，總有一個時期它曾經是液體的而且在轉動着；密度較大的物質聚集在中心附近，輕的物質在外層；由於轉動的緣故它的表面就具有扁的旋轉橢球形，而且密度相同的各內層也可能是橢球形，和外表面的橢球形相似；因而自然可以假定，中央慣量橢球是扁的旋轉橢球，而且（1）地球外表面的短軸 OF_1F，（2）自轉軸 OP_1P 和（3）慣性橢球的短軸 OC_1C 三者之間的交角都很小。這裏 F_1, P_1 和 C_1 表示慣性橢球表面上的點，而 F, P, C 則爲地球表面上的點，地球表面被當作扁的旋轉橢球。

在力學中可以證明，地球因慣性而繞其重心 O 的轉動是以下述方式進行的。設在任何時刻 OP_1P 爲瞬時轉動軸線。設想有一個平面 Π，與慣性橢球表面相切於點 P_1，與這平面垂直的直線爲 OG_1。可以證明，在這時刻的主動量矩的方向是沿着這垂線 OG_1，它的大小（用某種單位）可用矢量 OG_1 的長來表示。因爲根據基本定理（§110）在因慣性而運動

的情形下主動量矩的方向和大小都不變，所以平面 Π 在空間中對於中心 O 的位置也是不變的。因此物體的這種運動使得慣性橢球總是沿着平面 Π 作無滑動的滾動，而且由點 O 至橢球與平面的接觸點 P_1 的方向線永遠是慣性橢球的瞬時轉動軸線，同時也就是地球的瞬時轉動軸線。

假若慣性橢球是旋轉橢球，那末根據幾何定理點 C_1, G_1 和 P_1 總在一個平面上，在慣性橢球的一條子午線上，且若橢球是扁的，則點 G_1 就位於點 C_1 和 P_1 之間。而且，因為其中所有子午線都是相同的，所以 G_1P_1 是固定的，因而，P_1 就在平面 Π 上以 G_1 爲心畫出了一個圓。根據這個原因 P_1 與橢球頂點 C_1 的距離是固定的，也就是說 P_1 在慣性橢球表面上以 C_1 爲圓心畫出半徑爲 P_1C_1 的圓，地球表面上的極 P 則繞點 C 而畫出圓，點 C 在地球上是不移動的。

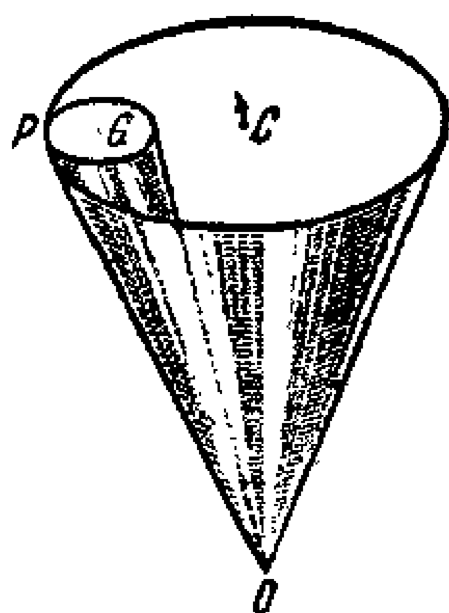


圖　70.

爲了更清楚地體會地球的這種轉動，設想（圖 70）有一個靜止的圓錐面，其軸線爲 OG_1G，頂角等於 $2GOP$，和一個與地球有關的圓錐面，軸線爲 OC_1C，頂角爲 $2COP$，這個寬的圓錐面以其內表面沿窄的靜止圓錐面的外表面作不滑動的滾動。在每一時刻兩圓錐面的接觸線就是地球的瞬時轉動軸線。若由北天極的一邊來看，轉動及整個運動都是沿反時針的方向。

因爲角 C_1OP_1（角 COP 也一樣），如我們以後將看到的，不超過 $0''.3$，所以靜止平面 Π 的小面積可以認爲是與慣性橢球在頂點 C_1 處的小面積重合的。圖 71 表示平面 Π 上不同的點的運動；這是在北天極的一邊所看到的形狀。點 G_1 是靜止的；以 C_1 爲圓心具有長的半徑的圓周沿着以 G_1 爲圓心具有短的半徑的圓周作不滑動的滾動；兩圓的

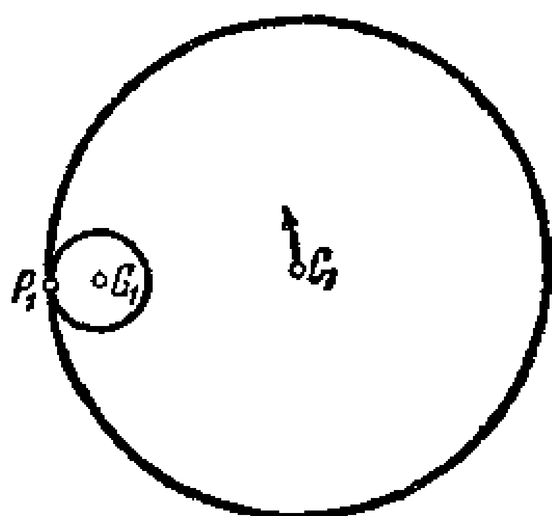


圖 71.

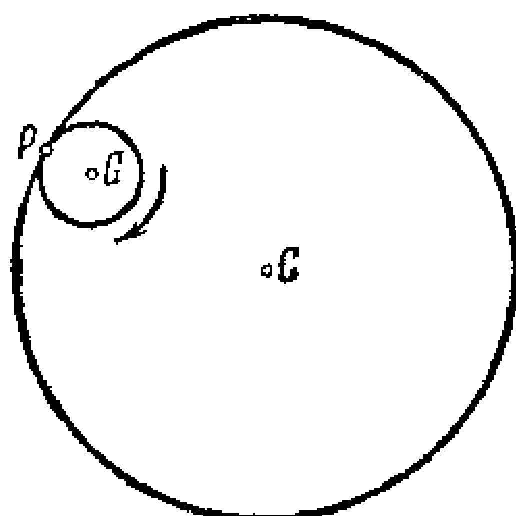


圖 72.

內切點 P_1 是瞬時轉動極；轉動是沿反時針方向的。因為這種滾動中沒有滑動，所以點 P_1 在以 G_1 為圓心的圓周上沿反時針方向移動。在 C_1 繞 G_1 轉動一周的時間內地球就繞 G_1 轉一周（恆星日）。點 P_1 走過中心為 C_1 的整個圓周所需的恆星日數，等於大圓的圓周長與小圓的圓周長之比，或等於半徑 P_1C_1 與半徑 G_1P_1 之比（以後我們將計算 $P_1C_1 : G_1P_1$ 的比值）。圖 72 表示在地球表面上的點的運動。點 C 及以 C 為圓心的圓於地球上是靜止的；以 G 為圓心的小圓沿這圓周作不滑動的滾動，使得圓的內切點 P 在以 C 為圓心的圓上沿反時針方向而運動。點 P 就是地球的北極。

這樣，極在地球表面上的運動以及因之而生的緯度的振動是下述原因的必然結果：按照地球形成的條件，主動量矩 OG_1 並不與慣量橢球的短軸 OC_1 相重合。

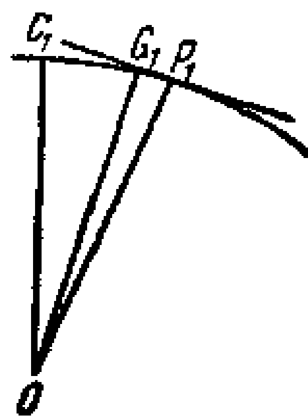


圖 73.

半徑比 $C_1P_1 : G_1P_1$ 以及 $CP : GP$，可由慣性橢球子午線的形狀算出。在圖 73 中這子午線在點 P_1 的切線就是子午面與靜止平面 Π 的交線。直線 OG_1 與這直線垂直，所以，它與子午線在點 P_1 的法線平行。因此角 G_1OP_1 在幾何上和地心緯度與天文緯度之差完全類似，而角 C_1OP_1 則與地心緯度的餘角相似。

因而，運用§20的討論，我們得到公式：

$$G_1OP_1=\frac{1}{2}e^2\sin 2(90°-C_1OP_1),$$

其中e爲慣性橢球子午線的偏心率。因爲角C_1OP_1不大，所以足夠準確地有

$$G_1OP_1=\frac{1}{2}e^2\sin(180°-2C_1OP_1)=\frac{1}{2}e^2\sin 2C_1OP_1=e^2\,C_1OP_1。$$

慣性橢球的軸線爲：短軸$\frac{1}{\sqrt{C}}$，長軸$\frac{1}{\sqrt{A}}$，其中A和C爲地球的相當的轉動慣量。根據普通定則：

$$e^2=\frac{\frac{1}{A}-\frac{1}{C}}{\frac{1}{A}}=\frac{C-A}{C},\quad 因此\quad \frac{G_1OP_1}{C_1OP_1}=\frac{C-A}{C}。$$

量$\frac{C-A}{C}$可根據歲差和章動的理論算出；由計算得出0.00328；因此$C_1OP_1=\frac{G_1OP_1}{0.00328}=305\,G_1OP_1$。因此，在305恆星日中，瞬時轉動軸線應當在地面上繞點C完成一次繞轉，慣性橢球的短軸就是在點C穿過地球表面的。這是歐拉首先發現的，因此這個周期稱爲歐拉周期。用理論方法來計算角CCP是不可能的。上述的計算對於任何小的C_1P_1都是正確的。

十九世紀末期的觀測指出，角CCP變化於$0''.3$和$0''.1$之間，極的旋轉周期爲428日(這是陳德勒—Chandler—發現的，故稱爲陳德勒周期)。它與歐拉周期不同的原因是，地球不是絕對的剛體，而有某種程度的彈性，如同鋼一樣。根據上述，半徑GP只等於CP的305分之一，因此，小於$0''.001$；自然，它是不可能被觀測所發現的。

§112. 歲差和章動　地球並非因慣性而轉動；如我們在§109中所看到的一樣，在地球上不斷地作用着兩對力偶：一對來自太陽，另一對來自月球，它們的力矩位於赤道平面上，因此，就與瞬時轉動軸線OP垂

直，也可以認爲與主動量矩垂直，原因是它們之間的角度，正如剛剛指出的，是小於 $0''.001$ 的。因此，如在§109 中所指出的，這些力偶只會影響矢量 OG 或 OP 的方向。有鑒於此我們可以把討論轉移到天球上，取：它的半徑爲 OG，天球中心爲 O，OP 爲轉動軸線，Υ 爲春分點，A 爲赤經等於 $90°$ 的赤道上的點。根據基本定理(參考§108 和§109)，由於太陽的作用點 G 在天球上的速度等於

$$\frac{\text{力偶矩}}{\text{主動量矩}}=3k^2\frac{M_\odot}{R_\odot^3}(C-A)\sin\delta\cos\delta/C\omega, \tag{156}$$

其中 ω 爲地球周日轉動的角速度，即每恆星日 2π。記住我們只引出歲差和章動的主要項，對於 $\frac{1}{R_\odot^3}$ 取其近似值(參考§23 之末)：

$$\frac{1}{R_\odot^3}=\frac{1+3\,e\cos g}{a^3\left(1-\frac{3}{2}e^2\right)},$$

其中 g 表示平近點角。

於是點 G 的速度等於

$$\frac{3}{2}k^2\frac{M_\odot}{a^3\left(1-\frac{3}{2}e^2\right)}(C-A)(1+3e\cos g)2\sin\delta\cos\delta/C\,\omega,$$

或等於

$$c\,(1+3e\cos g)2\sin\delta\cos\delta, \tag{157}$$

對於月球，類似地：

$$c'\,(1+3e'\cos g')2\sin\delta'\cos\delta', \tag{158}$$

其中爲了書寫簡便起見對於太陽規定：

$$c=\frac{3}{2}\times\frac{k^2M_\odot}{\omega a^3\left(1-\frac{3}{2}e^2\right)}\times\frac{C-A}{C}, \tag{159}$$

類似地對於月球

$$c'=\frac{3}{2}\times\frac{k^2M_☽}{\omega a'^3\left(1-\frac{3}{2}e'^2\right)}\times\frac{C-A}{C}。 \tag{160}$$

1. 我們從研究太陽的影響開始;為了書寫簡便起見暫時以字母 d 表示 $c(1+3e\cos g)$。

假若在所討論的時刻太陽的赤經等於 α,那末當 $\delta>0$ 時力偶矩 $\mu=2d\sin\delta\cos\delta$ 指向赤道上赤經為 $\alpha-90^\circ$ 的點。力偶矩也像力一樣可以根據平行四邊形定則而分為幾個支量。因此我們把 μ 投影於 Ox 軸上($O\Upsilon$ 的方向)並用 M 表示這投影,又把 μ 投影在 Oy 軸上(OA 的方向)並以 N 表示這投影;因此,

$$M=2d\sin\delta\cos\delta\cos(\alpha-90^\circ)=2d\sin\delta\cos\delta\sin\alpha,$$

$$N=2d\sin\delta\cos\delta\sin(\alpha-90^\circ)=-2d\sin\delta\cos\delta\cos\alpha。$$

當 $\delta<0$ 時也得到這些式子;在這種情形下力偶矢量的赤經等於 $\alpha+90^\circ$(參考第 293 頁上的表)。在圖 19 中 ΥE 代表黃道,其中角 $D\Upsilon E=\varepsilon$, S 為太陽的位置, SD 為其赤緯 δ; ΥS 為太陽的黃經 λ。由球面三角形 $SD\Upsilon$ 有:

$$\sin\delta=\sin\lambda\sin\varepsilon;\ \sin\lambda\cos\varepsilon=\cos\delta\sin\alpha;\ \cos\lambda=\cos\delta\cos\alpha。$$

將這些式子代入 M 和 N 的公式中,得:

$$M=2d\sin\lambda\sin\varepsilon\sin\lambda\cos\varepsilon=d\sin\varepsilon\cos\varepsilon(1-\cos 2\lambda)=$$
$$=d\sin\varepsilon\cos\varepsilon-d\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos 2\lambda,$$

$$N=-2d\sin\lambda\sin\varepsilon\cos\lambda=-d\sin\varepsilon\sin 2\lambda。$$

黃經 λ 並不是與時間 t 成正比地變化,但是,只考慮章動的主要項,我們用太陽的平黃經 L 代替 λ,太陽的平黃經以每回歸年 2π 的速度均勻地增加着❶,這樣就得到

$$M=d\sin\varepsilon\cos\varepsilon-d\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos 2L;$$

$$N=-d\sin\varepsilon\sin 2L;$$

---

❶ 為了要考慮有地球軌道偏心率的一次冪的各項,須設 $\lambda=L+2e\sin g$(參考§23); $\sin 2\lambda=\sin 2L+4e\sin g\cos 2L$; $\cos 2\lambda=\cos 2L-4e\sin g\sin 2L$,並以 $(1+3e\sin g)$ 乘 $\sin 2\lambda$ 和 $\cos 2\lambda$,在乘積中保留所有帶 e 的各項;整個計算是簡單的,但我們並不引用它,為了不使公式變得複雜。

最後，以 $c(1+3e\cos g)$ 代替 M 的頭一項中的 d，以 c 代替其他各項中的 d；於是

$$M=c\sin\varepsilon\cos\varepsilon+3ce\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos g-c\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos 2L,$$

$$N=-c\sin\varepsilon\sin 2L;$$

M 和 N 爲點 G 在天球表面上的運動速度，我們將看到，在 y 軸上速度只由於 $2L$ 以半年爲周期作周期性的變化，在 x 軸上，除了由於 $2L$ 和 g 的周期振動以外，速度 M 具有不變的項 $c\sin\varepsilon\cos\varepsilon$；這速度指向春分點，也就是說永遠垂直於連接赤極 P 和黃極 Π 的弧 $P\Pi$；因此，P 沿圓周繞 Π 轉動，角速度爲 $\frac{c\sin\varepsilon\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon}=c\cos\varepsilon$，只要 ε 不變，這是常數（但是，由於月地重心因行星的吸引而生的擾動運動，ε 在慢慢地變化）；春分點也以同樣的角速度 $c\cos\varepsilon$ 向着太陽運動；因此在每一時刻極的速度是指向運動着的春分點的；M 和 N 爲極 P 的速度在運動着的坐標軸線 Ox 和 Oy 上的投影，兩坐標軸的運動是因極 P 的運動而生的。

忽略帶 e 的項由 M 和 N 的式子容易推出，力偶矢量 μ 的末端（也就是點 G 的速度的末端）每年兩次所畫出的曲線是橢圓，這橢圓與 Oy 軸相切於點 O，其直徑沿 Ox 軸爲 $c\sin\varepsilon\cos\varepsilon$，沿 Oy 軸爲 $c\sin\varepsilon$；運動是反時針的。

根據所述，若以字母 x 和 y 表示任何時刻極的坐標，則它們的速度爲：

$$\frac{dx}{dt}=M=c\sin\varepsilon\cos\varepsilon+3ce\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos g-c\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos 2L,$$

$$\frac{dy}{dt}=N=-c\sin\varepsilon\sin 2L。$$

因此

$$x=\int_0^t c\sin\varepsilon\cos\varepsilon\,dt+\int_0^t 3ec\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos g\,dt-$$

$$-\int_0^t c\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos 2L\,dt,$$

$$y=-\int_0^t c\sin\varepsilon\sin 2L\,dt.$$

引用變數的代替，即以 L 和 g 代替 t；則

$$dt=\frac{dt}{dL}dL;\ dt=\frac{dt}{dg}dg;$$

以回歸年作爲時間的單位，並忽略地球軌道近日點的運動，我們將得：

$$\frac{dL}{dt}=\frac{dg}{dt}=2\pi \text{ 和 } dt=\frac{1}{2\pi}dL=\frac{1}{2\pi}dg\text{。}$$

然後

$$\left.\begin{aligned}x&=c\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cdot t+\frac{3e}{2\pi}c\sin\varepsilon\cos\varepsilon\sin g-\\&\quad-\frac{c}{2\times2\pi}\sin\varepsilon\cos\varepsilon\sin 2L+\text{常數},\\y&=\frac{c}{2\times2\pi}\sin\varepsilon\cos 2L+\text{常數}\text{。}\end{aligned}\right\}\qquad(161)$$

這兒 $c\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cdot t$ 是一段圓弧的長度，這段弧是點 G 或 P 繞極 Π 由初始時刻起在時間 t 內所畫出的；對應的中心角爲 $c\cos\varepsilon\cdot t$，春分點沿黃道所畫出的弧也是同樣的；這就是太陽歲差。

以一年和半年爲周期的周期項 x 和 y 就是太陽章動。

2. 現在討論月球的影響。這裏的討論在原則上與太陽的情形相同，但是複雜得多，原因是月球軌道在赤道上的交點及其與赤道的交角都在隨着時間變化(參考 §32)。

在圖 74 中 ♈A 爲赤道，♈E 爲黃道，N 爲月球軌道在赤道上的升交點，☊ 爲月球軌道在黃道上的升交點，這兩個交點都是指在所討論的時刻的交點；我們將以符號 N 表示弧 ♈N；以符號 ☊ 表示弧 ♈☊；以字母 I 表示在此時刻月球軌道與赤道的交角，以字母 i 表示它與黃道的交角，i 是不變的；☊ 均勻地隨着時間而減小，它在 18.613 年中的變化是 2π，

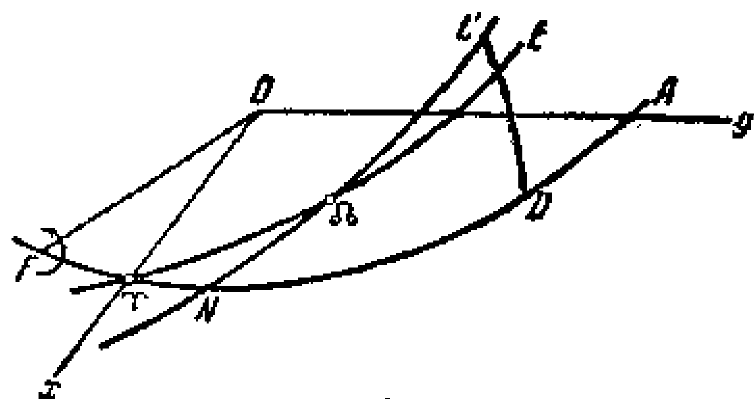


圖　74.

$$\frac{d\Omega}{dt}=-\frac{2\pi}{18.613};\quad \frac{dt}{d\Omega}=-\frac{18.613}{2\pi}。$$

角 N 以同一周期振動於 $+13°$ 與 $-13°$ 之間(§32)。

設在所討論的時刻月球在其軌道上的位置爲 L'，以 δ' 表示它的赤緯 $L'D$，它的赤經 $\Upsilon D=\alpha'$。力偶矩爲 $c'\sin 2\delta'$ 且當 $\delta\gtrless 0$ 時指向赤道上赤經爲 $\alpha'\mp 90°$ 的點(圖中的 OF)；我們暫不以 $(1+3e'\cos g')$ 乘它。將它投影於軸 Ox 和 Oy 上：

$$M'=c'\sin 2\delta'\cos(\alpha'-90°);\quad N'=c'\sin 2\delta'\sin(\alpha'-90°);$$

把它們變換如下：

$$M'=2c'\sin\delta'\cos\delta'\sin\alpha'=2c'\sin\delta'\cos\delta'\sin(\Upsilon N+ND)=$$
$$=2c'\sin\delta'\cos\delta'(\sin N\cos ND+\cos N\sin ND)=$$
$$=2c'\sin\delta'\cos\delta'\sin N\cos ND+2c'\sin\delta'\cos\delta'\cos N\sin ND。$$

但由三角形 $L'ND$ 有：

$$\sin\delta'=\sin I\sin NL';$$
$$\cos\delta'\cos ND=\cos NL';$$
$$\cos\delta'\sin ND=\sin NL'\cos I。$$

因此
$$M'=2c'\sin I\sin NL'\cos NL'\sin N+$$
$$+2c'\sin I\sin NL'\sin NL'\cos I\cos N。$$

但由三角形 $\Upsilon N\Omega$ 有：

$$\sin I\sin N=\sin i\sin\Omega,$$
$$\sin I\cos N=\cos i\sin\varepsilon+\sin i\cos\varepsilon\cos\Omega,$$
$$\cos I=\cos\varepsilon\cos i-\sin\varepsilon\sin i\cos\Omega。$$

因此

$$M'=2c'\sin i\sin\Omega\sin NL'\cos NL'+$$
$$+2c'\sin^2 NL'(\cos\varepsilon\cos i-\sin\varepsilon\sin i\cos\Omega)\times$$
$$\times(\cos i\sin\varepsilon+\sin i\cos\varepsilon\cos\Omega)=$$
$$=c'\sin i\sin\Omega\sin 2NL'+c'(1-\cos 2NL')\,[\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos^2 i+$$
$$+\sin i\cos i\cos\Omega\cos 2\varepsilon-\sin^2 i\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos^2\Omega],$$

最後，

$$M'=c'\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos^2 i+c'\sin i\cos i\cos 2\varepsilon\cos\Omega-$$
$$-c'\sin^2 i\sin\varepsilon\cos\varepsilon\frac{1+\cos 2\Omega}{2}-$$
$$-c'\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos^2 i\cos 2NL'+c'\sin i\sin\Omega\sin 2NL'-$$
$$-c'\sin i\cos i\cos 2\varepsilon\cos\Omega\cos 2NL'+$$
$$+c'\sin^2 i\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos^2\Omega\cos 2NL'。$$

在這裏，各項是按照它們的值的減小次序而排列的，關於這一點一部份在現在就可以看出，而另部份在以後亦將要看出。

類似地變換力矩 N' 如下：

$$N'=2c'\sin\delta'\cos\delta'\sin(\alpha'-90^\circ)=-2c'\sin\delta'\cos\delta'\cos\alpha=$$
$$=-2c'\sin\delta'\cos\delta'\cos(N+ND)=$$
$$=-2c'\sin\delta'\cos\delta'\cos N\cos ND+$$
$$+2c'\sin\delta'\cos\delta'\sin N\sin ND。$$

在這兒應用已經用過的 $\sin\delta'$, $\cos\delta'\cos ND$ 和 $\cos\delta'\sin ND$ 的式子，得：

$$N'=-2c'\sin I\sin NL'\cos NL'\cos N+$$
$$+2c'\sin I\sin NL'\cos I\sin NL'\sin N,$$

又應用 $\sin I\cos N$, $\cos I$ 和 $\sin I\sin N$ 的式子，得：

$$N'=-2c'(\cos i\sin\varepsilon+\sin i\cos\varepsilon\cos\Omega)\sin NL'\cos NL'+$$
$$+2c'\sin i\sin\Omega(\cos\varepsilon\cos i-\sin\varepsilon\sin i\cos\Omega)\sin^2 NL'=$$
$$=-c'(\cos i\sin\varepsilon+\sin i\cos\varepsilon\cos\Omega)\sin 2NL'+$$
$$+c'\sin i\sin\Omega(\cos\varepsilon\cos i-\sin\varepsilon\sin i\cos\Omega)(1-\cos 2NL'),$$

最後，

$$N'=+c'\sin i\cos i\cos\varepsilon\sin\Omega-c'\sin^2 i\sin\varepsilon\sin\Omega\cos\Omega-$$
$$-c'\cos i\sin\varepsilon\sin 2NL'-c'\sin i\cos\varepsilon\cos\Omega\sin 2NL'-$$
$$-c'\sin i\cos i\cos\varepsilon\sin\Omega\cos 2NL'+$$
$$+c'\sin^2 i\sin\varepsilon\sin\Omega\cos\Omega\cos 2NL'。$$

記着只要得出章動的主要項,我們取 NL' 等於月球的黃經;它們之間的差可以達到 $\pm 13°$,且以 18.6 年的周期而變化着,因此含 NL' 的各項也有同樣周期的附加振動,但這振動並不大;此外,如在太陽的情形,我們取月球在其軌道上的平均黃經來代替其眞黃經,並以符號 L' 表示月球的平黃經,如同 L 表示太陽的平黃經一樣。

如在太陽的情形,設 $\frac{dx}{dt}=M'$, $\frac{dy}{dt}=N'$,應求出 x 和 y。

在積分時我們將遇到:

(1)僅在 M' 中的不決定於 L' 也不決定於 Ω 的項;它們給出月球歲差,

(2)帶 Ω 的項;把這些項積分時引入變數 Ω 以代替 t,使得

$$\int \sin\Omega\, dt=\frac{dt}{d\Omega}\int \sin\Omega\, d\Omega;$$

但

$$\frac{dt}{d\Omega}=1:\frac{d\Omega}{dt};$$

$$\frac{d\Omega}{dt}=\frac{-2\pi}{18.613}=\text{月球交點的周年速度};$$

因此

$$\int \sin\Omega dt=+\frac{18.613}{2\pi}\cos\Omega。$$

完全類似地

$$\int \cos\Omega\, dt=-\frac{18.613}{2\pi}\sin\Omega;$$

$$\int \sin 2\Omega\, dt=\frac{18.613}{4\pi}\cos 2\Omega;$$

(3)有 $2L'$ 的項;同樣地把它們積分

$$\int \sin 2L'\, dt=\int \sin 2L'\frac{dt}{dL'}dL',$$

但

$$\frac{dL'}{dt}=\frac{2\pi\times 365.242}{27.3217}=\frac{2\pi}{0.074804},$$

其中 $\frac{27.3217}{365.242}$ 爲恆星月與回歸年的時間長度的比率,我們以回歸年爲

時間的單位。因此

$$\int \sin 2L'\,dt = -\frac{0.074804}{4\pi}\cos 2L';$$

$$\int \cos 2L'\,dt = +\frac{0.074804}{4\pi}\sin 2L'。$$

最後，我們只把 M' 的展開式中的第一項 $c'\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos^2 i$ 乘以 $(1+3e'\cos g')$，並設 $\frac{dg'}{dt}=\frac{dL'}{dt}$，忽略月球近地點的運動。

積分，只取主要項，得：

$$x = c'\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos^2 i\cdot t - \frac{1}{2}c'\sin^2 i\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cdot t - \Big\}\text{由月球而生的歲差}$$

$$\left.\begin{aligned}
&-c'\sin i\cos i\cos 2\varepsilon\frac{18.613}{2\pi}\sin\Omega+\\
&+c'\sin^2 i\sin\varepsilon\cos\varepsilon\frac{18.613}{8\pi}\sin 2\Omega-\\
&-c'\cos^2 i\sin\varepsilon\cos\varepsilon\frac{0.0748}{4\pi}\sin 2L'+\\
&+3c'e'\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos^2 i\frac{0.0748}{2\pi}\sin g'+\text{常數},\\
y=\;&c'\sin i\cos i\cos\varepsilon\frac{18.613}{2\pi}\cos\Omega-\\
&-c'\sin^2 i\sin\varepsilon\frac{18.613}{8\pi}\cos 2\Omega+\\
&+c'\cos i\sin\varepsilon\frac{0.0748}{4\pi}\cos 2L'+\text{常數}。
\end{aligned}\right\}\text{由月球而生的章動}\qquad(162)$$

每次積分都得到一個常數；關於最後常數的問題由下面的考慮來解決。

極 P 沿 Oy 軸只對於某平均點作周期性的振動，若力偶矩 N 和 N' 不存在，極 P 就會停留在這平均點；這點的位置由它和黃極的距離來確定，設這距離等於 ε_0。所以，事實上在所討論的時刻 ε 等於 ε_0 + 周期部份（也就是交角的章動 $=\Delta\varepsilon=\Delta\varepsilon_\odot+\Delta\varepsilon_{\mathbb{C}}$）；量 ε_0 須由觀測來確定。它因黃極的運動而變化。

極沿 Ox 軸的運動引起了春分點沿黃道的運動；春分點對於平春分點作周期性的章動運動 $\Delta\psi$（沿黃經的章動），平春分點則因歲差而移動，它在時刻 t 的位置由它與春分點 Υ_0 的距離確定，Υ_0 爲任何選定的時刻 t_0 的春分點，例如在選定的年之初(1850, 1900, 今年等等，視問題而定)。因此 $\Upsilon_0\Upsilon = n \csc\varepsilon \times (t-t_0) +$ 周期部份 $\Delta\psi$（黃經章動）。

§113. 日月歲差和章動 把由太陽(公式 161)和由月球(公式 162)得到的 x 和 y 相加起來，就得到最後的日月歲差和章動

$$\left.\begin{aligned} n &= c\sin\varepsilon\cos\varepsilon + c'\sin\varepsilon\cos\varepsilon\left(\cos^2 i - \frac{1}{2}\sin^2 i\right) = \\ &= v\sin\varepsilon = \boldsymbol{P}\sin\varepsilon\cos\varepsilon, \\ p &= \left[c + c'\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 i\right)\right]\cos\varepsilon = \boldsymbol{P}\cos\varepsilon; \end{aligned}\right\}\text{歲差}$$

$$\Delta\varepsilon = c\frac{\sin\varepsilon}{4\pi}\cos 2L + \Big\}\text{太陽章動}$$

$$\left.\begin{aligned} &+ c'\sin i\cos i\cos\varepsilon\frac{18.6133}{2\pi}\cos\Omega - \\ &- c'\sin^2 i\sin\varepsilon\frac{18.6133}{8\pi}\cos 2\Omega + \\ &\qquad + c'\cos i\sin\varepsilon\frac{0.07480}{4\pi}\cos 2L' \end{aligned}\right\}\text{月球章動}$$

$$\Delta\psi\sin\varepsilon = -c\frac{\sin\varepsilon\cos\varepsilon}{4\pi}\sin 2L + c\frac{3e\sin\varepsilon\cos\varepsilon}{2\pi}\sin g - \Big\}\text{太陽章動}$$

$$\left.\begin{aligned} &- c'\sin i\cos i\cos 2\varepsilon\frac{18.6133}{2\pi}\sin\Omega + \\ &+ c'\sin^2 i\sin\varepsilon\cos\varepsilon\frac{18.6133}{8\pi}\sin 2\Omega - \\ &- c'\cos^2 i\sin\varepsilon\cos\varepsilon\frac{0.07480}{4\pi}\sin 2L' + \\ &+ c'3e'\cos^2 i\sin\varepsilon\cos\varepsilon\frac{0.07480}{2\pi}\sin g'。 \end{aligned}\right\}\text{月球章動}$$

爲了計算各個係數必須知道下列各量的數值：ε, i, L, e, $g = L - \Gamma$（其

中 Γ 爲太陽近地點的黃經)，L'，e'，$g'=L'-\Gamma'$(其中 Γ' 爲月球近地點的黃經)，Ω 和 L，L'，Ω，Γ，Γ' 的變化周期，還有，量 c 及 c'。所有這些量，除了 c 和 c' 以外，都可由觀測以及太陽和月球運動的理論得知；注意，ε，e，e' 隨時間的變化不大。在量 c 和 c' 中我們目前還完全不知道 $\frac{C-A}{C}$，其餘的量(參考公式 159 和 160) 可由觀測確定，但此時 c 和 c' 尚未確定；我們就要看到它們是如何確定的。

若在本節的公式中引入 1900.0 的數值：

$$\varepsilon=23°27'8''.26;\quad e=0.016751;$$

$$i=5°8'43''.427;\quad e'=0.054900,$$

則得：

$$p=c\times0.917392+c'\times0.906324,$$

$$n=c\times0.365108+c'\times0.360704,$$

$\Delta\psi\sin\varepsilon$	$\Delta\psi$	$\Delta\varepsilon$
$-c'\times0.180784\sin\Omega$	$-c'\times0.454247\sin\Omega$	$+c'\times0.242749\cos\Omega$
$+c'\times0.002175\sin2\Omega$	$+c'\times0.005465\sin2\Omega$	$-c'\times0.002371\cos2\Omega$
$-c\times0.029054\sin2L$	$-c\times0.073004\sin2L$	$+c\times0.031671\cos2L$
$+c\times0.002920\sin g$	$+c\times0.007337\sin g$	
$-c'\times0.002156\sin2L'$	$-c'\times0.005417\sin2L'$	$+c'\times0.002360\cos2L'$
$+c'\times0.000710\sin g'$	$+c'\times0.001785\sin g'$	

然而，把注意力轉向下面一個完全初等的考慮是有用的。爲什麼在章動中帶 Ω 的項是最大的呢？並非因爲相應的速度是大的；相反地，從 M 和 M'，N 和 N' 的力偶矩公式中可看出，它們小於和 L 及 L' 有關的速度，由於因子 $\sin i$；它們雖然很小，但在長時間(9.3 年)內仍使極向一邊運動，然後在 9.3 年内又向另一邊運動；結果極離開平均位置就遠了。根據同樣的原因，雖然由月球決定的速度大於由太陽決定的速度$\left(因爲\ \frac{M_{☽}}{R_{☽}^3}\ 大於\ \frac{M_{\odot}}{R^3}\right)$，但後者每 3 個月變一次記號，而前者每一星期變一次，結果由 $2L$ 決定的項就大於由 $2L'$ 決定的項。

在後面的各公式中我們看到了，帶 Ω 的章動的頭幾項，比其他的大

得多；由此可知，若我們用逐次近似法得到了 c 和 c' 的雖然只是近似的值，但我們已經可以把小項夠準確地算出來了，而為了使量 c 和 c' 更準確，我們應當由觀測只確定主要項的係數。以弧秒為單位由觀測確定：

（1）對於 $\cos\Omega$ 的黃赤交角章動的係數，即 $0.242749\,c'$，對於它現在所採用的值是 $9''.21$ 和（2）歲差 n 的係數，即 $0.3651085\,c+$ $+0.3607036\,c'$，對於它所採用的值等於 $20''.0468$（對於 1900 年）。因此為了確定 c 和 c' 我們有兩個方程式：

$$n=c[9.562422]+c'[9.557150]=20''.0468,$$

$$c'[9.385157]=9''.21\,。$$

括號中的數字為對數。

由它們得：　　$c'=[1.579103]=37''.9405$

和　　$c=[1.241144]=17''.4238$ 。

若將 c 和 c' 的這些值代入公式，則得：

$\Delta\psi\sin\varepsilon$	$\Delta\psi$	$\Delta\varepsilon$
$-6''.8590\sin\Omega$	$-17''.2344\sin\Omega$	$+9''.21\cos\Omega$
$+0.0825\sin 2\Omega$	$+0.2073\sin 2\Omega$	$-0.0899\cos 2\Omega$
$-0.5062\sin 2L$	$-1.2720\sin 2L$	$+0.5518\cos 2L$
$+0.0509\sin g$	$+0.1278\sin g$	
$-0.0818\sin 2L'$	$-0.2055\sin 2L'$	$+0.0895\cos 2L'$
$-0.0269\sin g'$	$+0.0677\sin g'$	

把我們的計算結果與第 241 和 242 頁上 §92 中章動的公式裏現時所採用的係數相比較，就可以看出兩者幾乎完全符合。

在此研究中所得到的 c 和 c' 的數值可以用來計算 $\frac{C-A}{C}$ 以及月球質量與地球質量的比率；這是計算 $\frac{C-A}{C}$ 和月球質量的不多的幾種方法之一，$\frac{C-A}{C}$ 即是所謂地球的力學橢率（或動力學扁度）。計算它們時必須知道其他的量的數值，c 和 c' 與這些量有關（參考公式 159

和 160)。

量 k^2 由克普勒第三定律的公式確定：$k^2=\frac{4\pi^2a^3}{P^2(M_\odot+m)}$；把它應用於地球帶着月球繞太陽的運動，並取月地重心與太陽的平均距離爲長度單位(長度的基本天文單位)，$a=1$，取回歸長爲時間單位，卽得 $P=$ $=\frac{365.2564}{365.2422}$；地球自轉的角速度 $\omega=2\pi\times366.2422$，以弧秒爲單位時量 c 等於

$$c=\frac{3}{2}\times\frac{4\pi^2}{M_\odot+m}\left(\frac{365.2422}{365.2564}\right)^2\times\frac{M_\odot}{2\pi\times366.2422}\times\frac{206265''}{1-\frac{3}{2}e^2}\times\frac{C-A}{C}。$$

在此取 $\frac{m}{M_\odot}=\frac{1}{330000}$ 及 $e=0.016751$，我們得到 $c=[3.7250756]\frac{C-A}{C}=$ $=5309''.768\frac{C-A}{C}$。

在公式 $c'=\frac{3}{2}\times\frac{k^2M_☽}{\omega\times a'^3\left(1-\frac{3}{2}e'^2\right)}\times\frac{C-A}{C}$ 中，仍用以前的單位，我們得：$a':1=\sin p_\odot:\sin p_☽$；引入符號 $\mu=\frac{M_☽}{M}$，其中 M 爲地球質量，則 $M_☽=\frac{(M+M_☽)\mu}{1+\mu}=\frac{m\mu}{1+\mu}$，$c'$ 的公式變爲

$$c'=\frac{3}{2}\times\frac{4\pi^2}{M_\odot+m}\left(\frac{365.2422}{365.2564}\right)^2\frac{m}{2\pi\times366.2422}\left(\frac{\sin p_☽}{\sin p_\odot}\right)^3\frac{206265''}{1-\frac{3}{2}e'^2}\times$$

$$\times\frac{\mu}{1+\mu}\times\frac{C-A}{C}。$$

$\frac{M_\odot}{m}$ 和 $p_\odot$ 的數值與這公式中其他的數字比起來是很不可靠的，但是，我們已經看到了(§106, 3)，它們由關係式 $p_\odot\sqrt[3]{\frac{M_\odot}{m}}=607''.052$ 而彼此有關聯。$\sin p_☽$ 的值等於 $3422''.5$ 。

因此，

$$c'=\frac{3\pi}{(607.052)^2}\left(\frac{365.2422}{365.2564}\right)^2\frac{(3422.5)^3}{366.2422}\times\frac{206265''}{1-\frac{3}{2}e'^2}\times\frac{\mu}{1+\mu}\times\frac{C-A}{C}。$$

在此 $e'=0.054900$；根據此公式得

$$c'=[5.9802148]\frac{\mu}{1+\mu}\times\frac{C-A}{C}。$$

使所求出的 c 和 c' 的式子等於先前計算出的它們的值(參考第308頁)，得

$$\frac{C-A}{C}=[7.516068]=\frac{1}{304.742};\quad \frac{\mu}{1+\mu}\times\frac{C-A}{C}=[5.598888];$$

$$\frac{\mu}{1+\mu}=[8.082820]=\frac{1}{82.638};\ \mu=\frac{1}{81.638}。$$

附加一句，根據月球運動的準確理論來作較準確的計算，可以得出 c' 的另外一些值；德·西特爾(de Sitter)給出了下面的方程式(p 爲黃經的日月歲差，N 爲 $\Delta\varepsilon$ 中 $\cos\Omega$ 的係數)：

$$p=\left(5309''.7704+944193''.19\frac{\mu}{1+\mu}\right)\frac{C-A}{C}\cos\varepsilon,$$

$$N=252871''\times\frac{\mu}{1+\mu}\times\frac{C-A}{C}\cos\varepsilon。$$

習　題

第二章

1．確定公式 $\sin x = x\frac{60-7x^2}{60+3x^2}$ 的誤差，其中 x 以度表示，並證明，這公式當 $x^\circ < 25^\circ$ 時準確到小數點後第 6 位(史萊辛格)。

2．已給球面三角形的角 $A=70^\circ$，$B=50^\circ$，$C=60^\circ$，求其邊。

3．在 A 爲直角的直角球面三角形中，若 $2s=a+b+c$，證明

$$\sin s\sin(s-a)=\sin(s-b)\sin(s-c)=\frac{1}{2}\sin b\sin c.$$

4．在球面三角形中已給邊：$a=b=c=75^\circ$；計算角。

5．在球面三角形中已給角：$A=B=C=75^\circ$；計算邊。

6．求一個三角形，其中每一個角的度數與每邊的度數相同。

7．在球面三角形中若角 A 大於 180°，則與它相對的邊 a 是否可以小於 180°？證明您的意見的正確性。

8．在球面三角形中已給：$a=b=150^\circ$；$c=330^\circ$，計算各角；把這個三角形畫出來。

9．在球面三角形中已給：$A=B=75^\circ$；$C=270^\circ$，計算邊。

10．研究一個球面三角形，已給 b，c 和 B。（甲）計算 a，C 和 A 時須應用什麽公式？（乙）量 b，c 和 B 能否任意地給出？（丙）若 $c=350^\circ$，$b=30^\circ$，$B=60^\circ$，計算 a，C 和 A（有幾個解？畫出這個三角形，以便作解）。（丁）若 $b=10^\circ$，$c=350^\circ$，$B=60^\circ$，計算 a，C 和 A（有幾個解?）。（戊）若 $c=330^\circ$，$b=25^\circ$，$B=135^\circ$，計算 a，C 和 A（有幾個解?）。（已）證明，在後一情形中爲了檢查整個計算，可用公式：$\sin\frac{1}{2}(a_1+a_2)=-\sin c\sin\frac{1}{2}(A_1+A_2)$；$\sin 22^\circ 12'.4=\sin 10^\circ\sin 130^\circ 53'.7$。

11．求出正球面四角形中邊 a 和角 A 的關係，在正球面四角形中所有的角都相同，所有的邊也相同。

12．計算面積等於 1 平方度的正球面四角形(參考 11 題)的角及邊。

13．等邊球面三角形的面積等於 R^2，其中 R 爲球的半徑；計算其角及邊。

14．正球面四角形（題 11）的面積等於 R^2，其中 R 爲球的半徑；計算其角及邊。

15．用本書所指出的方法或由白塞耳公式推出高斯內插公式：

$$f(x_0+nw)=f(x_0)+n\Delta^{\mathrm{I}}_{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}n(n-1)\Delta_0^{\mathrm{II}}+\frac{(n+1)n(n-1)}{1\times2\times3}\Delta^{\mathrm{III}}_{\frac{1}{2}}+$$
$$+\frac{n(n^2-1)(n-2)}{1\times2\times3\times4}\Delta_0^{\mathrm{IV}}+\frac{n(n^2-1)(n^2-4)}{1\times2\times3\times4\times5}\Delta^{\mathrm{V}}_{\frac{1}{2}}+\cdots$$

16．推出埃維列特內插公式：

$$f(x_0+nw)=f(x_0)+n\Delta^{\mathrm{I}}_{\frac{1}{2}}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\times2\times3}\Delta^{\mathrm{III}}_0+\frac{(n+1)n(n-1)}{1\times2\times3}\Delta^{\mathrm{III}}_1-$$
$$-\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\times2\times3\times4\times5}\Delta^{\mathrm{IV}}_0+$$
$$+\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\times2\times3\times4\times5}\Delta^{\mathrm{IV}}_1-\cdots$$

17．根據天文年曆，已知月球的赤緯如下：

1942 一月 28.0 +17°45′26″
1942 一月 28.5　18 12 50
1942 一月 29.0　　28 07
1942 一月 29.5　　30 50
1942 一月 30.0　18 20 41
1942 一月 30.5 +17 57 31

求出由一月 29.0 到一月 29.5 之間月球赤緯最大的時間及其值。求出一月 29.0 赤緯變化的時速。

第三章

1．當月球赤緯為 0°，並且假定它在一天內沒有變化，則在緯度等於 φ 的地方，由於月球的吸引，重物在那天畫出什麼曲線（x 軸向着南點，y 軸向西點）？

2．行星的橢圓軌道半長徑，即它到太陽的距離的最大值和最小值的算術平均數，在天文學中稱為行星到太陽的平均距離是有條件的。然而，若根據真近點角 v 來均勻分配所有到太陽的距離，則實際的平均距離是什麼？

3．根據準確到 e 的一次冪公式 $v=M+2e\sin M$ 證明：在這樣的準確度下，若 F 為行星軌道的不在太陽處的焦點，Π 為近日點，P 為行星在橢圓上的位置，則角 $\Pi FP=M$，即在行星轉動時，向徑 FP 的角速率為常數（F 為托勒玫理論中的所謂平均點"Punctum aequans"。參看布拉日哥著的"普通天文學教程"）。

4．當太陽中心的黃經等於 0°，90°，180°，270° 時認為是春，夏，秋，冬各季的開始。按照公式：太陽平黃經 $L=180°+\omega+M=\odot-2e\sin M$（即略去攝動）來計算春，夏，秋，冬四季的長度，令（對於我們的時間）$\omega=102°.00$；$e=0.01673$，太陽平黃經 L 平均每天變化 0°.98565。提示：用兩次準確到 0°.01 的逐步近似法計算 $\odot=0°$，90°，180°，270° 時的 L 值。

第四章

1．在天球上給了赤道坐標為 (α,δ) 和 (α',δ') 的兩點。求經過它們的大圓，即求此大圓對天赤道的傾角 $J(<90°)$，和天赤道的交點的赤經 α_0，以及大圓上最靠近北天極那點的赤經 A 和赤緯 D。

2　把地球當作半徑等於6371公里的圓球，計算由白令海峽的Б.吉翁米德島（Б. Диомид，蘇聯的極東點），$\varphi=65°47'$，東經$\lambda=190°58'$，到納希切曼山（Гор. Нахичевань）$\varphi=39°13'$，$\lambda=45°25'$的距離，以公里爲單位。爲了驗算起見，用兩個公式(11)和(12)來計算。

3．把地球當作半徑等於6371公里的圓球，計算堪察加(Канчатка)南端(洛帕特卡角)，$\varphi=50°11'$，$\lambda=156°37'$，和多腦河岸的依茲邁意耳山(Гор. Измаил)，$\varphi=45°21'$，$\lambda=28°48'$之間的距離，以公里爲單位。根據公式(11)和(12)計算。

4．昴宿主星之一昴宿六(金牛座η星)的坐標(1950年)爲：$\alpha=3^h44^m30^s$；$\delta=+23°57'.1$。求其黃經和黃緯，取$\varepsilon=23°26'.7$。

5．把地球當作半徑等於6371公里的圓球，求莫斯科($\varphi=55°45'.3$，$\lambda=37°34'.2$)到塔什干($\varphi=41°19'.5$；$\lambda=69°17'.8$)的距離，以及塔什干對於莫斯科的方位角(爲了無線電需要解決這種問題)。

6．求天球上三點：(α, δ)，(α', δ')，(α'', δ'')同在一大圓上時，它們坐標間的關係。

7．三點同在一大圓上，已知其中二點坐標爲：(α, δ)和(α', δ')第三點赤緯爲δ''，求其赤經α''。

8．已知天球上兩點的坐標爲：$S(\alpha, \delta)$，$S'(\alpha', \delta')$。求S和S'點的中點M的坐標，即M點的赤經ΥD和赤緯MD。

9．已知太陽上同一黑子的三個位置的日心坐標爲：λ_1，β_1；λ_2，β_2；λ_3，β_3。由什麼樣的公式來確定太陽自轉軸的方向，即太陽北極的L，B以及太陽赤道對黃道的傾角i和升交點黃經？認爲太陽黑子的日面緯度b不變化。

10．確定下列各量的幾何意義：

(1) §30 I，1中的m和M；　(2) §30 I，2中的n和N；

(3) §30 I，4中的m和M；　(4) §30 II，1中的m和M；

(5) §30 II，2中的n和N。

11．對於天球上什麼位置的恆星，關係式$\tan\varphi\tan\delta\cos t+1=0$才成立？

12．在公式：

(1) $\cos a=\sin\delta\cos\varphi-\cos\delta\sin\varphi\cos t$；

(2) $\cos b=-\sin\delta\cos\varphi+\cos\delta\sin\varphi\cos t$；

(3) $\cos c=\sin\delta\cos\varphi+\cos\delta\sin\varphi\cos t$

中，a，b，c各弧的幾何意義是什麼？

13．白道對黃道的傾角$=i(5°9')$，升交點黃經爲Ω；問白道北極的黃道坐標爲何？

14．白道對天赤道的傾角I的最大值和最小值爲何？相應的對黃道的升交點的黃經Ω和對天赤道的升交點的赤經A爲何？

15．在緯度爲φ的地方，當黃道和地平南半的交角(甲)爲最大，(乙)爲最小時，黃道和

地平的相對位置如何？交角等於多少？

16. 爲什麼在蘇聯中緯度地區，春天的上弦月在天剛黑時很高，而秋天低；但下弦月在天快亮時相反：春天低，秋天高？

17. 在甚麼樣的情況下，白道面和地平面南半的交角爲：(甲)最大，(乙)最小，等於多少？

18. 認爲太陽是在黃道上均勻地運動(它的每天平均角速度爲多少？)，計算太陽在春分後 n 天的赤緯。把計算引到五月1日，準確到半度。

19. 由於太陽在黃道上的運動不均勻，習題18的解在一年內的最大誤差是多少(參看第三章)，一年中甚麼時候有這樣的誤差？

20. 在地上給定的地方，一層年內黃道經過東點和西點幾次？

21. L 和 A 表示太陽的黃經和赤經，求證：當 $L+A=90°$，或 $270°$, $450°$, $630°$ 時，$L-A$ 的絕對值爲最大。在這些情形中，求 $\tan L$ 和 $\tan A$ 表爲 ε 的函數式(波耳)。

22. 在緯度爲 φ 的地方，赤緯爲 δ 的恆星在其周日平行圈上哪一點的星位角 q 爲最大？哪一點爲最小？在這兩種情形中 q 的值爲多少？

第五章

1. 1941年十一月16日莫斯科地方恆星時爲 $8^h58^m17^s.0$ 時的民用時爲何？必需的數據在95和97頁上去找。

2. 1941年十二月7日莫斯科地方民用時爲 $20^h20^m0^s.00$ 時的恆星時爲何？參看95和97頁上所給的數據。

3. 1941年十二月7日依爾庫茨克地方民用時爲 $20^h20^m0^s.00$ 時的恆星時爲何？參看95和97頁所給的數據。

4. 1937年七月12日莫斯科法定時 3^h31^m，蘇聯飛行員格洛莫夫(М. М. Громов)，猶馬雪夫(А. Б. Юмашев)，和達里林(С. А. Данилин)在到美國的不着陸飛行中由莫斯科起飛。經過 62^h17^m 後，他們到達加尼福利亞州的聖查辛多。聖查辛多位於第16時區。當時美國正用夏令時。求他們着陸時加尼福利亞所用時間的日期，時，分。

5. 都用當地地方時計算時間，火車在 A 城 9^h 出發，到 B 城時爲 9^h20^m。而又在 B 城 10^h 出發，回到 A 城時爲 10^h30^m。若火車速度爲每小時60公里，則兩城間的距離爲何？這些城叫什麼名字？

6. 一個沙羅周期6585天中，包含18年(日曆上所用的年，即365天或366天)又10天或11天或12天。說明在什麼情況下爲10天，什麼情況下爲11天，什麼情況下爲12天。要求完滿的答覆。

第六章

1. 春分點上升後一小時，地方恆星時爲何？

2. 夏至點上升後一小時，地方恆星時爲何？給出解此問題的公式。

3．地球上兩地應有什麼樣的位置，太陽才在任何日期任何時刻都在其中之一的地平之上或就在地平上？

4．在 $\varphi=+45°$ 的地方，兩個恆星在同一時刻有同一時角，但一個在地平，一個在卯酉圈上。問：這些恆星 (α,δ)，(α',δ') 的坐標間的關係如何？（波耳）

5．把習題4也應用到緯度 φ。恆星坐標和 φ 之間的關係如何？

6．證明：在緯度 $45°$ 的地方，每個恆星從上升到經過卯酉圈西段的時間間隔相同（等於多少？）。（波耳）

7．研究由獵戶座 β 星到 α 星的弧在上升到下落之間和地平的交角怎樣變化。獵戶座 α 星的 $\alpha=5^h52^m$，$\delta=+7°.4$，獵戶座 β 星的 $\alpha=5^h12^m$，$\delta=-8°.3$。計算只須準確到 $1°$。認爲獵戶座 α 星和 β 星的中點 M 在天赤道上。

8．某天文學家有這樣習慣，一定要在地方恆星時爲某點鐘時才觀測天空，並且發現，無論是一年內哪一天觀測，他總看見太陽在地平上；只有一些天是上升，其他都是下落。問：他在地上什麼地方？在恆星時爲幾點鐘時觀測？哪些天太陽上升，哪些天下落？

9．某天文學家有這樣習慣，一定要在地方恆星時爲某點鐘時才觀測天空，並且發現，無論在一年內哪一天觀測，他總看到太陽在同一垂直平面內或者是黑夜。問：他在地上什麼地方？在恆星時爲幾點鐘時觀測？給出解此問題的公式。

10．白道是否能和地平重合？若能，則在什麼情況下：即觀測地的緯度 φ 和當時的恆星時爲何？

11．在什麼緯度可能有"曙光很快接替，只有半點鐘的黑夜"，即由昏影終（$z_{\odot}=97°$）到晨光始的時間等於30分鐘？證明：在此情形下，緯度和太陽中心的赤緯 $\delta_{\odot}$ 的關係可用公式表爲 $\delta_{\odot}=83°-\varphi-7'.1\cos\varphi$，其誤差小於 $0'.3$。

12．當北半球白晝最短時，似乎是太陽在這一天應該比附近各天出得晚而落得早。但若查看天文年曆則發現，在蘇聯中緯度地方，例如莫斯科，太陽是在十二月末出得最晚，而在十二月中落得最早，爲什麼？

13．當恆星經過天頂時，它在子午圈上；即是說，地平經度 $A=0°$；並且又在卯酉圈上，即是說 $A=90°$。根據§49中的公式，$\frac{dz}{dt}$ 在這裏究竟是多少：零或 $\cos\varphi$？

14．在什麼情況下，恆星天頂距的變化在一天內和它的時角變化成正比？（波耳）

15．證明：若在緯度爲 φ 的地方，兩個恆星的赤緯爲 δ 和 δ'，同時上升，並且在一個中天時，另一個已下落，則 $\tan\varphi\tan\delta=1-2\tan^2\varphi\tan^2\delta'$。（波耳）

16．作爲§50的問題1的一個數字例子，在莫斯科求天琴座 α 星（$\alpha=18^h35^m0^s$，$\delta==+38°43'.8$）和仙后座 γ 星（$\alpha=0^h53^m15^s$，$\delta=+60°24'.5$）天頂距相同時的地方恆星時及其對應的天頂距。

17．當兩個所給的恆星 (α,δ) 和 (α',δ') 同時通過緯度爲 φ 的地方的同一地平經圈時，求此時的地方恆星時 s。何時此現象不可能？提示：看清楚通過此二星的大圓對於天赤道的

偏角 I 和交點的赤經 α_0 (參看第四章的習題 1)。

18. 在什麼緯度和地方恆星時 s, 兩星 (α, δ) 和 (α', δ') 同時在地平上? 不考慮大氣折射。提示:通過此二星的大圓的極。

19. 在習題18中,在甚麼情形下兩星同時上升或同時下落,或同時一星上升而另一星下落。這和什麼有關?

20. 在一年內能不能有一天 (能不能說一天也沒有) 太陽同時在兩地 (φ, λ) (φ', λ') 的地平出現? 設地球爲圓球形。在什麼條件下在兩地都是上升或下落? 在什麼條件下在一地上升在另一地下落? 大氣折射和太陽半徑不考慮。考慮一下爲什麼解答(同時性)只能是近似的。

21. 把習題20的解用到列寧格勒 $(\varphi=59°57', \lambda=30°18')$ 和斯大林格勒 $(\varphi'=48°48', \lambda'=44°31')$。

22. 在緯度爲 φ 的地方, 赤緯爲 δ 的恆星的時角爲 t; 求此恆星的周日運動速度在此時刻沿大圓所指向着的地平上那一點的地平經度 A。

23. 在一年中哪一天(太陽中心的黃經爲何),天狼星$(\alpha=6^h43^m, \delta=-16°39')$在莫斯科$(\varphi=55°45')$在日落後一小時下落? 不考慮大氣折射。提示: 考慮由下面三點組成的球面三角形:春分點,西點、地平和黃道的交點。

24. 在一年中哪一天(太陽中心的黃經爲何),天狼星在莫斯科在日出前一小時上升? 不考慮大氣折射。提示:考慮球面三角形:春分點,東點、地平和黃道的交點。

25. 當 $z_\odot=97°$ 時,認爲是昏影終或晨光始,黑夜就在昏影終時開始,在晨光始時告終。如已給太陽中心緯度爲 $\delta_\odot$, 求黑夜最長(但白晝最短)地方的緯度和黑夜長度。並證明:只有在 $+7°>\delta_\odot>-7°$ 時,才談得到最長。

第七章

1. 假定大氣折射 $\rho=k\tan\zeta$, 其中 ζ 爲觀測到的天頂距, 證明: 大氣折射表爲眞天頂距 z 的函數式爲

$$\rho=k\tan z/(1-k\sec^2 z)=k\tan z(1+k\sec^2 z)。$$

2. 在天空中哪一個區域,恆星赤經由於大氣折射變大? 在哪個區域變小? 在哪個區域不變?

3. 在天空中哪一個區域,恆星赤緯由於大氣折射變大? 在哪個區域變小? 在哪個區域不變?

4. 取 $\rho=k\tan z$, 求大氣折射對時角的影響 $t'-t$, 對赤經的影響 $\alpha'-\alpha$ 和對赤緯的影響 $\delta'-\delta$, 都用 φ, δ, t 的函數表示。

5. 在什麼地方大氣折射對赤緯的影響,卽 $\Delta\delta$, 和在赤緯圈上的影響,卽 $\Delta\alpha\cos\delta$, 相同?

6. 在什麼地方大氣折射對赤緯的影響 $\Delta\delta$ 和在赤緯圈上的影響 $\Delta\alpha\cos\delta$ 絕對値相等,

而符號相反?

7．了解一下：習題5和習題6的兩條曲線和子午圈交於點 P 和 Z，交角爲 $45°$，而在這些點兩曲線以 $90°$ 互相傾斜。

8．假定大氣折射在所有的高度都等於 $k\tan z$，其中 k 爲常數，令 $\rho_i=k\tan(180°-\varphi-\delta)=$ 恆星在下中天時的大氣折射，$\rho_s=k\tan(\varphi-\delta)=$ 同一恆星上中天時的大氣折射，$\rho_0=k\cot\varphi=$ 在天極處恆星的大氣折射，證明：

$$(\rho_i-\rho_s)(\rho_0^2-k^2)+2\rho_0(\rho_i\rho_s+k^2)=0$$

(Gruey,, Bull. astr. т. V)。

9．假定大氣折射在所有的高度都等於 $k\tan z$，其中 k 爲常數，求受大氣折射改變了的恆星視位置在天球自轉下，對於真位置所畫出的曲線。y 軸正方向對着赤緯增加的方向（由恆星向天極），x 軸正方向爲赤經增加的方向。顯然，愈近地平的恆星，所得的曲線和實際的曲線相差愈遠 (Gruey, Bull. astr. т. V)。

10．在習題9中求出的曲線，確定它們對哪些恆星是橢圓，對哪些恆星是拋物線，對哪些是雙曲線。

11．在習題10中，若 $\varphi>0$，從天球外面看，由幾何考慮（用圖）確定在不同情形下恆星的視位置畫出曲線是按什麼方向，順時針或是反時針。曲線對於恆星真位置 Σ_0 的位置爲何?

12．取 $\rho=k\tan z$，k 爲常數，求天球轉動時，恆星時角 t 的變化速度受到大氣折射的影響。這個問題在拍天空照片時很重要，因爲由於大氣折射，恆星時角的變化速度（也就是天體照相儀繞着儀器極軸的旋轉速度）不是常數，而和緯度 φ，以及恆星位置 t，δ 有關。在最後的公式中，k 應該取甚麼值? 提示：需要求計算 $\frac{dt'}{ds}$ 的公式，其中 t' 爲被大氣折射改變了的時角，s 爲恆星時。

13．當被照相的位置離上中天不遠（可以取 $\cos t=1$）時，考慮習題12中的問題。當恆星在(1)天頂，(2)天赤道時，恆星時角由於大氣折射每小時變化速度的角秒數爲多少? 在子午圈上什麼地方，大氣折射影響爲(1)最小，(2)最大?若使天體照相儀轉動的鐘不是按恆星時在走，則時鐘每天進程應爲多少才能補償恆星在天頂時的大氣折射影響?

14．和習題13同樣的問題，但爲當恆星在下中天附近的情形，可以取 $\cos t=-1$。對於哪個赤緯，$\left(\frac{dt'}{ds}-1\right)$ 的值爲最小? 爲什麼由於大氣折射的影響，$\frac{dt'}{ds}$ 不變，而恆星在天球小圓上的位移 $\frac{dt'}{ds}\cos\delta$ 則在變化?

15．拱極星 ($\delta=88°—89°$) 在它的赤緯圈上的運動，即 $\frac{dt'}{ds}\cos\delta$，在不同的 t 值時，所受大氣折射的影響如何? 對於近似公式，赤緯圈上所有的星都取 $\sin\delta=1$ 和 $z=90°-\varphi$。

第八章

1．若 R，p 表示由地心所看到的圓球形天體的角半徑和視差，證明：$\sin R/\sin p$ 和天體到地球的距離無關。

2. 設地心和月球中心間的距離不變，月球地平視差爲 p，且月球在天頂時的角直徑等於 $31'0''$，則月球在下落時的角直徑爲何?

3. 天體在天空何處赤經的周日視差爲零?

4. 天體在天空何處赤緯的周日視差爲零?

5. 若地球爲球形，且密度爲常數，則 Z 和 Z' 點是否相合? 參看圖 42 和 43。

6. 在緯度 $\varphi=45°$ 的地方，差 $\varphi-\varphi'$ 等於多少? 此差數中多大的部份（多少角度分）和地球自轉有關? 其餘部份和什麼原因有關?

7. 觀測地的地心緯度爲 $\varphi(\varphi>0)$；行星的地心赤緯爲 δ，地平視差爲 p。則行星的地面位置對於其地心位置在一天內畫出什麼曲線? 其中除去使行星在天空的位置變化的一切其他原因（自行，大氣折射等）。令 y 軸正方向向着北天極，則 x 軸正方向是否向着赤經增加的方向? 若 $\delta=0°$，曲線變成什麼?

8. 若天體的地平視差小到 $\sin^2 p$ 可以忽略，證明：在緯度 φ 的地方觀測到的天體的周日運動路徑爲小圓，其半徑等於 $90°-\delta+p\sin\varphi\cos\delta$，中心比天極低 $p\cos\varphi\sin\delta$（斯瑪特 Smart）。提示：用類似 § 49 的公式的較差公式。

9. 火星的衛星浮波斯在火星赤道面上公轉，周期爲 7^h40^m；它的軌道半徑等於火星半徑的 2.79 倍，火星自轉周期爲 24^h40^m。證明：由於視差，火星赤道上的觀測者看到浮波斯由上升到下落的時間等於 4^h16^m，並且在緯度大於 $69°$ 的地方就看不見浮波斯了（斯瑪特）。

10. 若月球視差等於 $57'$ 時，其地心角半徑等於 $31'$；在月球視差爲 $61'$ 時，它的地心角半徑等於多少? 恆星和月球的地心位置或月心的地心路徑的距離應當在甚麼最大值之內，才能在下列情形中發生月掩星：（甲）對地心的觀測者，（乙）對於在地面上任何地點的觀測者? 取地球爲球形，半徑等於其赤道半徑。計算準確到 $\frac{1'}{2}$。

11. 在什麼情況下，地心的觀測者能看到金牛座 η 星被月球遮住，正在月心的背後? 此時月球對黃道的升交點黃經爲何? 黃白交角取作 $5°9'$。這種現象在哪一年發生? 參看第四章的習題 4 和書末的白道表。

12. 在哪一段時間內可能發生月掩金牛座 η 星，不管掩蓋的時間多長和在地上何處看到? 在最近的哪些年可以看到? 取月球平均視差爲 $57'$，平均角半徑爲 $15'.5$，地球取作球形。提示：求白道升交點黃經的極限，參看書末的白道表。

13. 把假想的觀測者由地心移到日心時，哪一個大行星的視差位移最大? 是時行星，太陽和地球的相對位置爲何? 此位移的量和它的黃經有什麼關係?

14. 證明：α 和 δ 的周年視差公式爲：

$$(\alpha'-\alpha)\cos\delta=\pi(\cos\alpha\sin\odot\cos\varepsilon-\sin\alpha\cos\odot),$$

$$\delta'-\delta=\pi(\cos\delta\sin\odot\sin\varepsilon-\sin\delta\cos\alpha\cos\odot-\sin\delta\sin\alpha\sin\odot\cos\varepsilon)。$$

15. 恆星 $S(\alpha,\delta)$ 的赤經的周年視差最大時，太陽黃經等於多少? 赤經周年視差的量是多少?（波耳）。提示：用習題 14 的公式。由方程式：$\frac{d(\alpha'-\alpha)\cos\delta}{d\odot}=0$ 得到兩個問題的回答。

第九章

在所有習題中地球繞日的運動當做在圓周上的均勻運動，光行差位移準確到一次冪；光行差指周年光行差。

1．指出恆星在天球上的位置：(甲)在給定時刻在天球上不因光行差而位移；(乙)只有黃經位移；(丙)只有黃緯位移，(丁)只有赤緯位移，(戊)只有赤經位移。

2．對於什麼恆星光行差在一年中任何一天裏：(甲)不改變赤緯？(乙)不改變赤經？

3．指出，在天球上的什麼地方有這樣的恆星，在初夏時光行差位移比其他恆星的大，等於什麼：(甲)沿赤緯 $\Delta\delta$，(乙)沿赤緯圈 $\Delta\alpha\cos\delta$。

4．與題3同，對於初春。

5．設想有一些恆星位於天球的一個大圓上；在給定的日期和小時它們的被周年光行差改變了的位置是在什麼曲線上(波耳)。

6．證明，對於給定的恆星若赤經的光行差達到最大或最小值，則太陽的 α_0 就等於恆星的 α，且若在這種情形下地球周年運動奔赴點的赤經爲 A，則 $\tan A\tan\alpha_0=-\cos^2\varepsilon$ (波耳)。

7．證明，若赤緯的光行差有最大值，則連接恆星和太陽，恆星和赤極的大圓在恆星處以直角相交(波耳)。

8．周年光行差對赤緯的影響是所有可能中最大的那種恆星位於何處？證明，它們位於這樣的曲線上，這曲線在切天球於赤極的平面上的中心投影爲一圓，其中心位於赤極和黃極在同一平面上的投影之間。求此圓的方程式。取弧 $P\Pi$ 在該平面上的投影爲 y 軸，取點 P 爲坐標系的原點。

9．對於哪些恆星由周年光行差而生的振動 $\Delta\alpha\cos\delta$ 是最大的，對於哪些恆星是最小的，最大和最小的振動是多少？

10．恆星位置 (α,δ) 由於光行差的影響在一天中沿大圓弧的位移的最大速度爲何，在一年中的那一天或那幾天它必須與恆星在天球上的位置有關，關係如何？

11．(甲)在一年中的那一天那一小時，對於地球上的什麼地方和對於什麼恆星，周年光行差與周日光行差使恆星位置朝同一方向移動？(乙)何時，何處，對於何恆星周年和周日光行差的位移方向相反？

第十章

1．根據圖68近似地確定：(甲)現在的北極星在公元前3000年時赤經和赤緯是多少，(乙)從現在起6500年後它們將是多少？

2．天琴座 α 星何時最近天極，那時它的赤經和赤緯數爲多少？

3．現在(1947年)北極星的平均 $\alpha=1^h47^m$，平均 $\delta=89°1'$。它的極距何時將是最小且

等於多少？那時它的赤經等於什麼？平均極的運動當作是沿大圓弧，速度爲每年 $20''.0$。

4．準確地解出習題 3，平均極的運動當作沿着球面半徑等於 $23°26'$ 的小圓。

5．當小熊座 α 與平均極的距離最小時（參考題 4），計算它的 α 和 δ 的周年歲差；m 和 n 由第 225 頁的表中取出。

6．現在夏至點位於雙子座；春分點何時會在此處？

7．若一個恆星的 α 和 δ 的日月歲差都等於零，這恆星在天球上的什麼地方？

8．位於黃極上的恆星的周年歲差等於什麼？

9．把行星歲差忽略不計，確定，赤經的周年歲差等於零的恆星處位於天球上何處？

10．把行星歲差忽略不計，指出在天球上的那一部份赤經的日月歲差是正的，在那一部份是負的。在這些部份中周年歲差 $\frac{d\alpha}{dt}$ 和 $\frac{d\alpha}{dt}\cos\delta$ 的變化範圍是甚麼？

11．把黃道當做靜止的，取日月歲差 p 爲常數，指出，可根據什麼公式來計算量 ζ, z, θ，應用由初始曆元 t_0 到給定曆元 t 的歲差的準確公式時這些量是必需的。

12．由於極 P 的運動每一個恆星 $S(\alpha, \delta)$ 的赤經圈的方向就在改變，因之連接 S 和恆星 S' 的弧 SS' 的位置角 Q 也在變。推出角 Q 變化的周年速度的公式。

13．對於曆元 t 已給恆星 S 的 $\alpha, \delta, \mu_\alpha, \mu_\delta$；設沿大圓弧的自行 μ 是常數，指出計算世紀變化速度 μ_α 和 μ_δ 的公式。

14．由章動公式 $x=\Delta\psi\sin\varepsilon$ 和 $y=\Delta\varepsilon$ 可知，若由外面看天球，隨着角 Ω 的增加眞極繞平均極的運動就反時針方向進行，但爲何在本書中（§ 84, 92）却說：順時針方向呢？參考圖 64。

15．對於哪些恆星赤緯由章動而生的振動最大，對於哪些最小？只注意到章動的一個主要項。

16．由本書的敍述及公式 (114) 顯見，恆星 $S(\alpha, \delta)$ 的赤經只因章動的主要項而生的振動是由下列各項組成的：$6''.86\sin\Omega\cot\varepsilon$（這一項對所有的恆星都相同，因而對於赤經之差沒有影響）及兩個與恆星 $S(\alpha, \delta)$ 的位置有關的項，$6''.86\sin\Omega\sin\alpha\tan\delta$ 和 $9''.10\cos\Omega\times\times\cos\alpha\tan\delta$。只考慮這兩項，確定，對於什麼恆星振動 $(\alpha-\alpha_0)\cos\delta$ 最大，對於哪些恆星最小，且這些振動的振幅等於什麼？

第十一章

1．爲什麼在 § 97 初肯定 P_0P 不超過 $28''$？它在哪些情形下爲最大？

2．一年內能不能有一天天極眞位置和同一白塞耳年初的天極平位置重合？若可能，則在什麼情況下，即在 τ 和 Ω 的值是多少的時候？只考慮章動的一個主要項。

3．前題中，由於章動中和 $2L$ 有關的第二項（按大小來說是第二項），兩極的不重合性如何？

4．下表給出 1941 年裏 13 天的赤經章動長周期項的值。

一月	0	$+0^s.142$	四月	30	$-0^s.072$	八月	28	$-0^s.069$
一月	30	.169	五月	30	.081	九月	27	.171
三月	1	.115	六月	29	.043	十月	27	.262
三月	31	.009	七月	29	.023	十一月	26	.280
						十二月	26	.230

用 x 軸表示日期，y 軸表示章動，畫出它的圖形；用均勻曲線聯結起來。為什麼曲線有兩個波，波的振幅和第 241 頁公式中的係數的關係如何？作出它的最高的和最低的切線，再在此二切線中間作一條和它們平行且距離相等的直線。此直線表示什麼？為什麼它和時間軸交於四月 30 日那點？每年都是這樣嗎？此直線和時間軸之間的交角怎樣由章動公式係數得出？參看第 241，242 頁。

5. 在第 251 頁已給 1944，45，46，47 年的白塞耳年初。求每年白塞耳年初和某地子夜相合時，這個地方的經度，並指出這個子夜的日期。

6. 只考慮 $\Delta\varepsilon$ 和 $\Delta\psi$ 中的章動的一個主要項，假設 $m=46''.09$ 和 $n=20''.04$，確定在什麼情況下，下列各量的每一個都達到它的最大值和最小值，並且這些值等於多少：（甲）A；（乙）B；（丙）f；（丁）g。

題　解

第二章

1. 誤差$=x^7/4582$。2. 沒有這樣的三角形，$A+B+C=180°$。4. $A=B=C=78°8'.0$; $2\sin\frac{1}{2}A=\sec\frac{1}{2}a$。 5. $a=b=c=69°33'.8$。 6. $a=A=90°$。 7. 否；在角小於180°的三角形的面積上不可能容有大於180°的大圓弧。 8. $A=B=62°20'.9$; $C=297°39'.1$。 9. $a=b=105°32'.5$; $c=274°7'.0$。 10. (甲)公式(1)和納比爾公式；(乙)否；$\sin c\sin B$應當$=$或$<\sin b$；(丙)一個解$a=23°48'.0$, $A=135°30'.5$; $C=342°29'.8$；(丁)三角形變成一個大圓；(戊)兩個解：$a=36°32'.2$; $A=95°2'.8$; $C=303°13'.1$; 和 $a=7°52'.6$; $A==166°44'.6$; $C=236°46'.9$。 11. $\cos A=-\tan^2\frac{1}{2}a$, $\tan^2\frac{1}{2}A=\sec a$。 12. $A==90°0'15''.71$; $a=0°59'59''.91$。 13. $A=79°5'54''.94$; $a=76°30'46''.4$。 14. $A==104°19'20''.2$; $a=52°53'28''.5$。 17. 正月 29.3567; $\delta=+18°31'21''.6$; 時速$==+45''.3125$。

第三章

1. 重物在一太陰日內順時針畫兩次橢圓，和y軸(卽値線WE)相切於原點，並在y軸南面；沿x軸的半徑$=0''.0173\sin\varphi\cos\varphi$，沿$y$軸的半徑$=0''.0173\cos\varphi$；在月球上升和下落時，重物在坐標原點。 2. r的平均值$=$橢圓半短徑。 4. $L=358°.14$; $89°.59$; $181°.86$; $270°.41$。因此春季長92.78天；夏季長93.61天；秋季長89.84天；冬季長89.01天。

第四章

1. $\tan I=\frac{\tan\delta}{\sin(\alpha-\alpha_0)}=\frac{\tan\delta'}{\sin(\alpha'-\alpha_0)}$，由此 $\tan\left[\frac{1}{2}(\alpha+\alpha')-\alpha_0\right]=\frac{\sin(\delta+\delta')}{\sin(\delta-\delta')}\tan\frac{1}{2}\times\times(\alpha-\alpha')$; $A=\alpha_0+90°$; $D=I$。 2. $71°40'=7969$公里。 3. $74°18'=8262$公里。 4. $\lambda==59°17'.6$; $\beta=+4°2'.8$。 5. 2795公里，方位角(由北點算)等於$111°36'.6$。 6. $\tan\delta\sin(\alpha'-\alpha'')+\tan\delta'\sin(\alpha''-\alpha)+\tan\delta''\sin(\alpha-\alpha')=0.7$。按照習題1求$I$和$\alpha_0$，則 $\tan\delta''=\tan I\sin(\alpha''-\alpha_0)$。 8. 按照習題1求 I 和 α_0；則 $\sin NS=\sin\delta/\sin I$; $\sin NS'=\sin\delta'/\sin I$；然後 $\sin MD=\sin I\sin\frac{1}{2}(NS+NS')$, $\tan(\Upsilon D-\alpha_0)=\cos I\tan\frac{1}{2}\times\times(NS+NS')$。 9. 由下列三個方程式：
$\cos\beta_1\cos\lambda_1\cos B\cos L+\cos\beta_1\sin\lambda_1\cos B\sin L+\sin\beta_1\sin B=\sin b$，未知量爲：$\cos B\cos L/\sin b$, $\cos B\sin L/\sin b$ 和 $\sin B/\sin b$; $i=90°-B$; $N=L+90°$。 10. (1) $m=\sin W\Sigma$; $M=\Sigma WA$; (2) 令ZQ垂直於$P\Sigma$；則$n=\cos ZQ$; $N=90°-PQ=Q$點的赤緯；(3) $m=\sin W\Sigma$; $M=ZW\Sigma$; (4) $m=\sin\Upsilon\Sigma$; $M=\Sigma\Upsilon A$; (5) $m=\sin\Upsilon\Sigma$; $N=$

$=\Sigma\Upsilon E$。 11 當恆星在它的赤緯圈和通過南北點的大圓相切的點時。 12. $a=N\Sigma$; $b=S\Sigma$; $c=\Sigma A$。 13. 緯度$=90^\circ-i$, 經度$=\Omega-90^\circ$。 14. I的最大值$=\varepsilon+i$; $\Omega=A=0^\circ$; I的最小值$=\varepsilon-i$; $A=0^\circ$; $\Omega=180^\circ$。 15. 黃道經過E和W; (1)$90^\circ-\varphi+\varepsilon$ (春分點上升); (2)$90^\circ-\varphi-\varepsilon$ (春分點下落)。 16. 參看習題15。春季裏春分點在昏影始時下落，上弦月在西南方，而秋季裏春分點在晨光終時下落，下弦月在東南方。 17. (1)白道在黃道上的升交點黃經$\Omega=0^\circ$，且春分點下落; $90^\circ-\varphi+\varepsilon+i$; (2) $\Omega=0$, 春分點上升; $90^\circ-\varphi-$ $-\varepsilon-i$。 18. 周日角速度$=59'$; $\sin\delta=\sin(59'\times n)\sin\varepsilon$; 五月1日的$n=41$; $\delta=+15^\circ.0$。 19. 太陽平黃經和眞黃經之差不超過$1^\circ.9\left(e=\frac{1}{60}\right)$; 因此，赤緯的最大誤差小於$1^\circ.9\sin\varepsilon=$ $\pm0^\circ.76$; 當平近點角$\approx 90^\circ$ 或 270° 時，即四月1日和十月1日附近，它達到那個值。 20. 平年732, 閏年734。 21. $\tan L=\pm\sqrt{\sec\varepsilon}$; $\tan A=\pm\sqrt{\cos\varepsilon}$。 22. 在地平經度$=90^\circ$時$q$最大，並且$\sin q=\cos\varphi\sec\delta$。不和卯酉圈相交的恆星的$q$既沒有最大值也沒有最小值(學習一下$q$角的算法)。

第五章

1. $5^h19^m7^s.74$。 2. $1^h24^m24^s.94$。 3. $1^h23^m41^s.07$。 4. 六月14日7時48分。 5. A和B間的距離爲25公里，經度差$=5^m=1^\circ.25$; 因此，由極到A和B的最大距離等於$10^\circ.4$; 離極那樣近，而且還用鐵路連結起來的城市是沒有的。 6. 若沙羅周期開始於閏年的一月或二月或閏後的第三年，則爲10天; 其餘情形爲11天; 當沙羅周期落到新曆的世紀年(1600年除外)時，還要加上1天，那末就得到12天了。

第六章

1. 17^h。 2. 若$\sin x=\tan\varphi\tan\varepsilon$, x在第一象限，則所求的恆星時爲23^h-x。 3. 在地上任意兩個位於同一直徑兩端的點。 4. $\alpha=\alpha'$, $\delta=-\delta'$。 5. $\alpha=\alpha'$, $\tan^2\varphi=$ $=-\tan\delta\cot\delta'$。 6. 恆星時12^h。 7. 由獵戶座β星到α星的弧的位置角$=32^\circ.5$, 因此在上升時爲$\varphi-32^\circ.5$, 下落時爲$\varphi+32^\circ.5$。 8. (1)在北極圈上，在恆星時18^h; 由冬季初到夏季初太陽上升; (2)在南極圈上，在恆星時6^h; 由十二月22日到六月22日太陽下落。 9. 兩條回歸線之間的地方; 若$\cos x=-\tan\varphi\cot\varepsilon$並且$x$在第二或第一象限時，則恆星時$s=18^h+x$; 若在回歸線上，則兩個時刻合而爲一，若在北回歸線，則$s=6^h$。 10. 參看§32末。在$90^\circ-\varepsilon-i$和$90^\circ-\varepsilon+i$之間的觀測地緯度就等於$90^\circ-I$; 恆星時$=18^h+N$。 11. 此公式由轉換公式$\cos 97^\circ=\sin\varphi\sin\delta-\cos\varphi\cos\delta\cos 15^m$得出，近似地假設$\cos\varphi\cos\delta\times$ $\times(1-\cos 15^m)=\cos\varphi\,0.96(1-\cos 15^m)$; φ的最小值$=59^\circ29'.5$。 12. 因爲這時的時差變化快，每天達到30^s。 13. 當恆星在天頂時，它的地平經度不定; 由特殊的討論可看出，在到天頂之前時，$\frac{dz}{dt}=-\cos\varphi$, 而在過天頂後，$\frac{dz}{dt}=+\cos\varphi$; z始終爲正。 14. 觀測者在地球赤道上，恆星在天赤道上。 16. $s_1=11^h59^m8^s$; $z_1=29^\circ47'.6$; $s_2=21^h2^m57^s$; $z_2=63^\circ20'.4$。

17. $\sin(s-\alpha_0)=\tan\varphi\cot I$; $\tan A=\tan(s-\alpha_0)\csc\varphi$; 若 $\varphi>I$ 時，現象不可能發生。 **18**. 如第四章的習題 1，應該求出通過二星的大圓，此大圓的北極的坐標爲：$\alpha_0-90°$ 和 $90°-I$，南極爲 $\alpha+90°$; $I-90°$; 這就是所求的恆星時和緯度。 **19**. $s<\alpha<s+12^h$ 的那個恆星上升；$s+12^h<\alpha<s$ 的恆星下落。 **20**. 應該求地面上通過 M 和 M' 兩地的大圓的極（參看習題18和19）；若二極在兩個回歸線之間，則每年太陽要近似地通過極的天頂（即 M 和 M' 的地平）四次，當太陽赤緯近於某極的緯度（混合情形可能偶然有）的時候。若極在回歸線上，則四天變成接連幾天，因太陽赤緯在此時變化很慢。 **21**. 極的緯度爲 $\pm 19°49'$；五月20日和六月25日太陽同時上升，十一月21日和一月22日同時下落。 **22**. 能夠計算恆星的天頂距 z，地平經度 A 和星位角 q；則 $\tan(x-A)=\cos z\cot q$。 **23**. $\lambda_{\odot}=39°30'$；四月30日。 **24**. $\lambda_{\odot}=154°39'$；八月28，29日。 **25**. $\sin\varphi=-\sin\delta_{\odot}/\sin 7°$; $\sin\frac{1}{2}T=\sin 83°\sec\delta_{\odot}$。

第七章

2. 在曲線 $Z\,90°\,P$ 內減小；在外增加；在此曲線上不變。 **3**. 在西邊增加，在東邊減少，在子午圈上不變。 **4**. $t-t'=\alpha'-\alpha=k\tan z\sin q\sec\delta=k\dfrac{\cos\varphi\sin t\sec\delta}{\sin\varphi\sin\delta+\cos\varphi\cos\delta\cos t}$; $\delta'-\delta=k\tan z\cos q=k\dfrac{\sin\varphi\cos\delta-\cos\varphi\sin\delta\cos t}{\sin\varphi\sin\delta+\cos\varphi\cos\delta\cos t}$。 **5**. 在 $q=45°$（在西面，兩變化 >0）和 $q=225°$（在東面，變化 <0）的曲線上。 **6**. 在 $q=135°$（在西面）和 $q=315°$（在東面）的曲線上。 **9**. $x^2+(y\sin\delta-k\cos\delta)^2=\cot^2\varphi\,(y\cos\delta+k\sin\delta)^2$。 **10**. 曲線方程式可以表爲：$x^2-y^2\dfrac{\cos(\varphi+\delta)\cos(\varphi-\delta)}{\sin^2\varphi}\cdots=0$，所以（參看圓錐曲線理論）若 $\cos(\varphi+\delta)<0$，即不下落的恆星，它是橢圓；若 $\cos(\varphi+\delta)>0$，即下落的恆星，它是雙曲線；若恆星周日運動和地平相切時，則爲拋物線。 **11**. 在一切情形下都是反時針方向；對於下落的恆星和上中天時在天頂與南點之間的不下落的恆星，Σ_0 在曲線之南，對於上中天時在天頂和天極之間的不下落的恆星，Σ_0 在橢圓內。 **12**. $\dfrac{dt'}{ds}=1-\dfrac{k\cos\varphi}{\cos\delta}\times\dfrac{\cos\varphi\cos\delta+\sin\varphi\sin\delta\cos t}{\cos^2 z}$; k 需要由第142頁的表中去取，平均取 $k=0.000292$ 就夠了。 **13**. $\dfrac{dt'}{ds}=1-\dfrac{k\cos\varphi}{\cos\delta\cos(\varphi-\delta)}$；在天頂時爲 $-k\times\times 15\times 3600''=-15''.77$；在天赤道時相同；在 $\delta=\frac{\varphi}{2}$ 時影響最小，等於 $-k+k\tan^2\frac{1}{2}\varphi$；隨着 δ 向 $90°$ 接近的程度，影響無限增加。鐘應該比恆星時慢 $\frac{15.77}{15}\times 24$，即每天 $25^s.2$。 **14**. 速度變化 $=-\dfrac{k\cos\varphi}{\cos\delta\cos(\varphi+\delta)}$；它爲正，因 $\varphi+\delta>90°$；在 $\delta=90°-\frac{1}{2}\varphi$ 時爲最小的正值，等於 $+k\left(\cot^2\frac{1}{2}\varphi-1\right)$；隨着 δ 向 $90°$ 和 $90°-\varphi$ 接近的程度而無限增加。

15. $dt'\cos\delta=ds\cos\delta-k\cos\varphi\dfrac{\cos\varphi\cos\delta+\sin\varphi\sin\delta\cos t}{\cos^2 z}ds\approx ds\cos\delta-k\cot^2\varphi\cos\delta\,ds-k\cot\varphi\cos t\,ds$；即是說，平均起來運動減慢（$-k\cot^2\varphi\cos\delta$ 項）並且除此之外（$-k\cot\varphi\cos t$），在 $270°<t<90°$ 時（赤緯圈的上半）還要減慢，而在 $90°<t<270°$ 時（赤緯圈下半）加快。

第八章

2. $31'(\sec p-\tan p)$。 3. 在觀測者的子午圈上。 4. 在曲線 $Z'\,90°\,P$(參看 §10)上。5. 不能，因地球在自轉。 6. $\varphi-\varphi'=11'.5$；其中由於地球自轉的爲 $\left(\frac{2\pi}{86164}\right)^2\frac{1}{2}\times\frac{1}{981}\times\times 6371\times 10^5\times 3438'=5'.9$；其餘部份 $5'.6$ 是由於地球爲旋轉橢圓體；因此，對地面物體的吸力不向着地心。 7. 爲橢圓，中心在 y 軸上，在行星的地心位置南面，距離爲 $p\sin\varphi'\cos\delta$，長徑和 x 軸平行，等於 $p\cos\varphi'$，短徑和 y 軸平行，等於 $p\cos\varphi'\sin\delta$。若 $\delta=0°$，橢圓變成一段弧，長爲 $p\cos\varphi'$，位於行星的地心位置之南，距離爲 $p\sin\varphi'$。 10. 月球的地心角半徑 $=16\frac{1'}{2}$；(甲)$16\frac{1'}{2}$；(乙)$77\frac{1'}{2}$。 11. 升交點黃經等於 $7°35'$ 或 $291°0'$；在 1950 年和 1954 年。 12. 在 $\Omega=25°55'$ 和 $272°40'$ 之間，即在 5.85 年內；由 1949.3 到 1955.1。 13. 在金星和水星下合時；視差位移 $=180°$，行星的日心和地心黃緯絕對值的和除外； 15. $\tan\delta=-\cot\alpha\cos\varepsilon$(二解)；最大値 $(\alpha'-\alpha)\cos\delta=\pi\sqrt{\cos^2\alpha\cos^2\varepsilon+\sin^2\alpha}=\pi\sqrt{1-\cos^2\alpha\sin^2\varepsilon}$。

第九章

1. (甲)位於奔赴點和奔離點；(乙)位於黃道上；(丙)位於奔赴點和奔離點的黃經圈上；(丁)位於奔赴點和奔離點的赤經圈上；(戊)位於曲線 $P\,90°\,A$ 上(參考 §10，A 爲奔赴點)。2. (甲)在夏至點和冬至點；(乙)這樣的恆星是沒有的。 3. 按赤緯爲在天極上的恆星，$|\Delta\delta|=20''.47$；按 $\Delta\alpha\cos\delta$ 爲在夏至點和冬至點的赤經圈(二分圈)上的恆星，若 $\alpha=6^h$，$\Delta\alpha\cos\delta=-20''.47$，若 $\alpha=18^h$，則 $=+20''.47$。 4. 沿赤緯對於在黃極上的恆星；沿 $\Delta\alpha\cos\delta$ 是在春分點和秋分點的赤經圈上；當 $\alpha=0$ 時爲 $-20''.47\cos\varepsilon$，當 $\alpha=12^h$ 時爲 $+20''.47\cos\varepsilon$。 5. 在平行於給定的大圓的小圓上，與大圓的距離爲 $20''.47\sin AN$，其中 AN 爲通過奔赴點 A 與給定的圓垂直的弧。 8. 所求的方程式爲 $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\tan\varepsilon\right)^2=$ $=\left(\frac{1}{2}\tan\varepsilon\right)^2$；在天球上的曲線爲曲線 $P\,90°\,\Pi$(參考 §10)。 9. 對於 $\alpha=6^h$ 及 $\alpha=18^h$ 的恆星最大，等於 $\pm k_0$；對於 $\alpha=0^h$ 和 $\alpha=12^h$ 的恆星最小，$\pm k_0\cos\varepsilon$。10. 它對於所有的恆星都一樣，等於 $20''.47(59'/3438')=0''.351$ ($59'$ 爲太陽的平均周日運動)，它發生於地球周年運動的奔赴點的黃經與恆星的黃經相等或大 $180°$。 11. 在這樣的日子，小時和分鐘，當地球周年運動的奔赴點與下列的點相合：(甲)東點(那時兩種光行差的方向相同)，(乙)西點(光行差的方向相反)。因此近似地：(甲)在夏初的日子對於所有的恆星在地球上任一地方在地方恆星時 18^h，在冬初的日子在地方恆星時 6^h；(乙)在(甲)點的時刻之後 12^h。更準確些：在指出的日子的每一天中在地球上這樣的子午線上，對於這子午線地方恆星時 6^h 或 18^h 準確地是冬初和夏初的時和分。

第十章

1 (甲) $\alpha=21^h.7$；$\delta=62°$；(乙) $\alpha=15^h.0$；$\delta=58°$。 2. 約公元 13500 年 $\alpha=6^h.0$；

$\delta=83^\circ.3$。 **3.** 在 2105 年；$26'.5$；$\alpha=6^h.0$。 **4.** $27'.4$。 **5.** $\frac{d\delta}{dt}=0$；$\frac{d\alpha}{dt}=3^s.08+1^s.33529$ $\tan 89^\circ 32'.6=+170^s.61$。 **6.** 約公元前 4500 年。 **7.** 在黃極上。 **8.** 只有行星歲差，赤經方面爲 $-\lambda'$（對於 1950 年爲 $-0''.1153$）；赤緯方面爲零。 **9.** 在曲線 $\Pi 90^\circ P$ 和 $\Pi' 90^\circ P'$ 上（在南極附近）。 **10.** $\frac{d\alpha}{dt}=\frac{p}{\cos\delta}\sin \Pi S\cos \Pi SP$；因此：（甲）$\frac{d\alpha}{dt}<0$，當 $\cos \Pi SP<0$，也就是在曲線 $\Pi 90^\circ P$ 之內（參考 § 10）當 δ 增加到 90° 時 $\left|\frac{d\alpha}{dt}\right|$ 由在點 Π 的零無限地增加；$\left|\frac{d\alpha}{dt}\cos\delta\right|$ 由在點 Π 的零增至在點 P 的極限值 $p\sin\varepsilon$；（乙）$\frac{d\alpha}{dt}>0$ 當 $\cos \Pi SP>0$，也就是在曲線 $\Pi 90^\circ P$ 之外；當 δ 增加到 90° 時 $\frac{d\alpha}{dt}$ 由零無限地增加；$\frac{d\alpha}{dt}\cos\delta$ 由在極上的 $+p\sin\varepsilon$ 增至在赤道上的 $+p\cos\varepsilon$。 **11.** $z=\zeta$；$P_0\Pi P=\frac{1}{2}p(t-t_0)$；$\sin\frac{1}{2}\theta=\sin\varepsilon\sin\frac{1}{2}p\times$ $\times(t-t_0)$；$\sin z=\sin\zeta=\tan\frac{1}{2}\theta\cot\varepsilon$。 **12.** $\frac{dQ}{dt}=n\sin\alpha\sec\delta$。 **13.** $100\frac{d\mu_\alpha}{dt}=100\,\mu_\delta\, n\times$ $\times\sin\alpha\sec^2\delta/206\,265$；$100\frac{d\mu_\delta}{dt}=-100\,\mu_\alpha\, n\sin\alpha/206\,265$；所有的量都以角秒表示。 **14** 因爲 Ω 隨時間而減小。 **15.** 對於在二至圈上的恆星爲最大（$\pm 9''.21$）；對於在二分圈上的恆星爲最小（$\pm 6''.86$）。 **16.** 對於在二分圈上的恆星最大，振幅爲 $9''.21\sin\delta$；對於在二至圈上的恆星最小，振幅爲 $6''.86\sin\delta$。

第十一章

1. 當 P 在年終時在 P_0P_0' 的延長線上，就產生 P_0P 的最大值；那末，$P_0P_0'=20''$，用 $\Delta\psi\sin\varepsilon$ 的公式中所有係數的和得到 $P_0'P$ 的最大理想值，即約 $7''$—$8''$。 **2.** 是的，當 $n\tau=$ $=6''.86$，即 $\tau=0.342$，並且同時 $\Omega=90^\circ$，使得 $-6''.86\sin\Omega=-6''.86$。 **3.** 對應於五月 6 日的 $\tau=0.342$，$L=43^\circ$，與 $2L$ 有關的項等於：$x=-0''.50\sin 86^\circ=-0''.5$；$y=$ $=+0''.55\cos 86^\circ=+0''.04$。 **4.** 由 $-1''.272\cos\varepsilon\sin 2L=-1.166\sin 2L=-0^s.0777\sin 2L$ 這項得到兩個波；直線近似地表示正弦曲線 $-17''.234\cos\varepsilon\sin\Omega=-15''.812\sin\Omega=$ $=-1^s.054\sin\Omega$ 由 $\Omega=186^\circ.24$ 到 $\Omega=167^\circ.13$，即由 $+0^s.115$ 到 $-0^s.234$ 這一部份，和更微小的章動項；四月 30 日時，$\Omega\approx 180^\circ$。 **5.** 1944 年。λ 爲西經 $169^\circ.27$，一月 1 日；1945 年。λ 爲東經 $103^\circ.54$，一月 1 日；1946 年。λ 爲東經 $16^\circ.34$，一月 1 日；1947 年。λ 爲西經 $70^\circ.85$，一月 1 日。 **6.** （甲）$A_{\min}=-0.342$ ($\tau=0$, $\Omega=90^\circ$)；$A_{\max}=1.342$ ($\tau=1$, $\Omega=270^\circ$)；（乙）$B_{\max}=+9''.21$；$B_{\min}=-9''.21$；（丙）$f_{\min}=-15''.76$ ($A=-0.342$)；$f_{\max}=$ $=+61''.85$ ($A=1.342$)；（丁）$g_{\max}=20''.04+6''.86=26''.90$；$g_{\min}=0''.00$。

附　　錄

地球軌道(紐康)

	1950, 1月 0.0 (格林尼治子夜)	在一儒略年中的變化	在一平均日中的變化
平黃經	99°.09537	+360°.007689	+0°.985647
近日點黃經	102°.08037	+0°.017192	+0°·000047
偏心率	0°.016751	−0.00000042	

白道(勃朗)

平黃經	51°.2059	13×360°+132°.678906	+13°.176397
近地點黃經	208°.7352	+ 40°.69034	+ 0°.111404
Ω	12°.1656	− 19°.34142	− 0°.052954
交角 i	5°8′43″.427		
偏心率 e'	0.0549005		

太陽視差	8″.80	1896年在巴黎會議上採用。
光行差常數	20″.47	
章動常數	9″.21	

根據紐康; t 爲年號

日月歲差	50″.3708+0″.000050(t−1900)
黃經的行星歲差	0″.1144−0″.000172(t−1900)
總歲差	50″.2564+0″.000222(t−1900)
赤經歲差	46″.0850+0″.000279(t−1900)
赤緯歲差	20″.0468−0″.000085(t−1900)
黃道轉動的周年速率	0″.4711−0″.000007(t−1900)
黃道旋轉軸(升交點)黃經	173°57′3″.6+32″.862(t−1900)
黃赤交角	23°27′8″.26−0″.4684(t−1900)
回歸年	365.24219879−0.0000000614(t−1900)
恆星年	365.25636042+0.0000000011(t−1900)
月球質量	1:81.45
$\frac{C-A}{C}$	0.0032753=1:305.32

根據德西特(B. A. N. 卷 VIII № 307)

太陽視差	8″.803
光行差常數	20″.477

章動常數 9″.218

日月歲差 50″.3746+0.000050(t−1900)

黃經的行星歲差 0″.1146−0.000174(t−1900)

總歲差 50″.2600+0.000223(t−1900)

月球質量 1:81.53

$\frac{C-A}{C}$ 0.0032794=1:304.94

根據斯賓塞鍾斯 (Monthly Notices, 卷 101)

太陽視差 8″.7904

章動常數 9″.2266

月球質量 1:81.288

斯特林公式係數(28)

n	Δ_0^{II}	Δ_0^{III}	Δ_0^{IV}	n	Δ_0^{II}	Δ_0^{III}	Δ_0^{IV}
0.00	+0.00000	−0.0000	−0.0000	0.25	+0.03125	−0.0391	−0.0024
0.01	00005	0017	0000	0.26	03380	0404	0026
0.02	00020	0033	0000	0.27	03645	0417	0028
0.03	00045	0050	0000	0.28	03920	0430	0030
0.04	00080	0067	0001	0.29	04205	0443	0032
0.05	+0.00125	−0.0083	−0.0001	0.30	+0.04500	−0.0455	−0.0034
0.06	00180	0100	0001	0.31	04805	0467	0036
0.07	00245	0116	0002	0.32	05120	0479	0038
0.08	00320	0133	0003	0.33	05445	0490	0040
0.09	00405	0149	0003	0.34	05780	0501	0043
0.10	+0.00500	−0.0165	−0.0004	0.35	+0.06125	−0.0512	−0.0045
0.11	00605	0181	0005	0.36	06480	0522	0047
0.12	00720	0197	0006	0.37	06845	0532	0049
0.13	00845	0213	0007	0.38	07220	0542	0051
0.14	00980	0229	0008	0.39	07605	0551	0054
0.15	+0.01125	−0.0244	−0.0009	0.40	+0.08000	−0.0560	−0.0056
0.16	01280	0260	0010	0.41	08405	0568	0058
0.17	01445	0275	0012	0.42	08820	0576	0060
0.18	01620	0290	0013	0.43	09245	0584	0063
0.19	01805	0305	0014	0.44	09680	0591	0065
0.20	+0.02000	−0.0320	−0.0016	0.45	+0.10125	−0.0598	−0.0067
0.21	02205	0335	0018	0.46	10580	0604	0069
0.22	02420	0349	0019	0.47	11045	0610	0072
0.23	02645	0363	0021	0.48	11520	0616	0074
0.24	02880	0377	0023	0.49	12005	0621	0076
0.25	+0.03125	−0.0391	−0.0024	0.50	+0.12500	−0.0625	−0.0078

白塞耳公式係數(29)

n	$\Delta^{II}_{\frac{1}{2}}$	$\Delta^{III}_{\frac{1}{2}}$	$\Delta^{IV}_{\frac{1}{2}}$	n
0.00	−0.00000−	+0.0000−	+0.0000+	1.00
0.01	00495	0008	0008	0.99
0.02	00980	0016	0016	0.98
0.03	01455	0023	0025	0.97
0.04	−0.01920	+0.0029−	+0.0033+	0.96
0.05	−0.02375−	+0.0036−	+0.0041+	0.95
0.06	02820	0041	0048	0.94
0.07	03255	0047	0056	0.93
0.08	03680	0052	0064	0.92
0.09	−0.04095−	+0.0056−	+0.0071+	0.91
0.10	−0.04500−	+0.0060−	+0.0078+	0.90
0.11	04895	0064	0086	0.89
0.12	05280	0067	0093	0.88
0.13	05655	0070	0100	0.87
0.14	−0.06020−	+0.0072−	+0.0106+	0.86
0.15	−0.06375−	+0.0074−	+0.0113+	0.85
0.16	06720	0076	0120	0.84
0.17	07055	0078	0126	0.83
0.18	07380	0079	0132	0.82
0.19	−0.07695−	+0.0080−	+0.0138+	0.81
0.20	−0.08000−	+0.0080−	+0.0144+	0.80
0.21	08295	0080	0150	0.79
0.22	08580	0080	0155	0.78
0.23	08855	0080	0161	0.77
0.24	−0.09120−	+0.0079−	+0.0166+	0.76
0.25	−0.09375−	+0.0078−	+0.0171+	0.75
0.26	09620	0077	0176	0.74
0.27	09855	0076	0180	0.73
0.28	10080	0074	0185	0.72
0.29	−0.10295−	+0.0072−	+0.0189+	0.71
0.30	−0.10500−	+0.0070−	+0.0093+	0.70
0.31	10695	0068	0197	0.69
0.32	10880	0065	0201	0.68
0.33	11055	0063	0205	0.67
0.34	−0.11220−	+0.0060−	+0.0208+	0.66

取與宗數同一邊的記號

(續前)

n	$\Delta^{II}_{\frac{1}{2}}$	$\Delta^{III}_{\frac{1}{2}}$	$\Delta^{IV}_{\frac{1}{2}}$	n
0.34	−0.11220−	+0.0060−	+0.0208+	0.66
0.35	−0.11375−	+0.0057−	+0.0211+	0.65
0.36	11520	0054	0214	0.64
0.37	11655	0050	0217	0.63
0.38	11780	0047	0219	0.62
0.39	−0.11895−	+0.0044−	+0.0222+	0.61
0.40	−0.12000−	+0.0040−	+0.0224+	0.60
0.41	12095	0036	0226	0.59
0.42	12180	0032	0228	0.58
0.43	12255	0029	0229	0.57
0.44	−0.12320−	+0.0025−	+0.0231+	0.56
0.45	−0.12375−	+0.0021−	+0.0232+	0.55
0.46	12420	0017	0233	0.54
0.47	12455	0012	0233	0.53
0.48	12480	0008	0234	0.52
0.49	−0.12495−	+0.0004−	+0.0234+	0.51
0.50	−0.12500−	+0.0000−	+0.0234+	0.50
取與宗數同一邊的記號				

最重要的參考文獻

教科書

Брюннов Ф., Учебник сферической астрономии, 1873.

Фогель Р., Курс сферической астрономии, Киев, 1910.

Иванов А. А. Курс сферической астрономии, 3-е изд., Берлин, 1923.

Казаков С. А., Курс сферической астрономии, Изд. 2-е под ред. П. П. Паренаго, ГТТИ, 1940.

Newcomb S., A compendium of spherical astronomy, 1906.

Smart W. M., Text-Book of Spherical Astronomy, Cambridge, 1936.

Encyklopädie der math. Wissenschaften Bd. VI, № 1, 2, E. Anding, Ueber Koordinaten und Zeit; F. Cohn, Reduktion der astronomischen Beobachtungen (обширные указания литературы).

個別問題的參考文獻

Bruhns P., Die astronomische Strahlenbrechung in ihrer historischen Entwicklung, Leipzig, 1861.

Gylden H., Untersuchungen über die Constitution der Atmosphäre und die Strahlenbrechung in derselben, Petersburg, 1866—1868.

Пулковские таблицы рефракции.

Radau R., 1) Recherhes sur la thèorie des refractions astronomiques. 2) Essai sur les réfractiones astronomiques, Annales de l'observ. de Paris, Mèmories T. XVI (1882) et XIX (1889).

Harzer P., Berechnung der Ablenkung der Lichtstrahlen in der Atmosphäre der Erde auf rein meteorologisch—physikalischer Grundlage, Publication der Sternwarte in Kiel, XIII und XIV, 1922—1924.

Gill D., A determination of the solar parallax and mass of the Moon from heliometer observations of the minor planets Iris, Victoria, Sappho, Annales of the Cape observatory, vol. VI and VII.

Hinks A. R., Solar parallax, Papers 1—8, Monthly Notices of R. A. S., vol. 62—70.

Spencer Jones H., The Solar Parallax and the Mass of the Moon from observations of Eros at the Opposition of 1931. Monthly Notices of R. A. S., vol. 101, 1942.

光行差．歲差．章動

Идельсон Н. И., Редукционные вычисления в астрономии, Приложение к Астрономическому Ежегоднику на 1941 г.

Идельсон Н. И., Фундаментальные постоянные в астрономии и геодезии, Приложение к Астрономическому Ежегоднику на 1942 г.

在這兩篇論文中詳細地指出了關於光行差，歲差和章動的豐富的文獻。

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝球面天文学教程
作者＝
页数＝３３２
ＳＳ号＝０
出版日期＝